

Modelování a experimentální zjišťování mechanických vlastností nelineárních materiálů

Biomechanika a lékařské přístroje

Projekt II

Lukáš Horný



Laboratoř biomechaniky člověka
Ústavu mechaniky Fakulty strojní
ČVUT v Praze

Teoretická část

Svět nelineární mechaniky „solidů“

(T1) Když se řekne lineární

(T2) Druhy a zdroje nelinearit

(T3) Kdo to byl A.L. Cauchy a kdo byl G. Green

(T4) Kdo byl R.S. Rivlin

Když se řekne lineární

- A co vlastně znamená, když se řekne lineární?

$$f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad \wedge \quad f(t\mathbf{u}) = tf(\mathbf{u})$$

Aditivita

Homogenita

- Důsledky

- přímé řešení rovnice $f(x) = c$
- jednoznačné řešení rovnice $f(x) = c$
- vektorový prostor řešení rovnice \rightarrow *superpozice*
- jednoznačná existence ortogonálního doplňku \rightarrow *optimalizace*

Když se řekne lineární

- Uved'te příklad nějaké lineární závislosti v mechanice

Ano, správně – jsme tu dnes hlavně kvůli rovnici:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Nějaké další návrhy?

Co třeba pružina s hmotou?

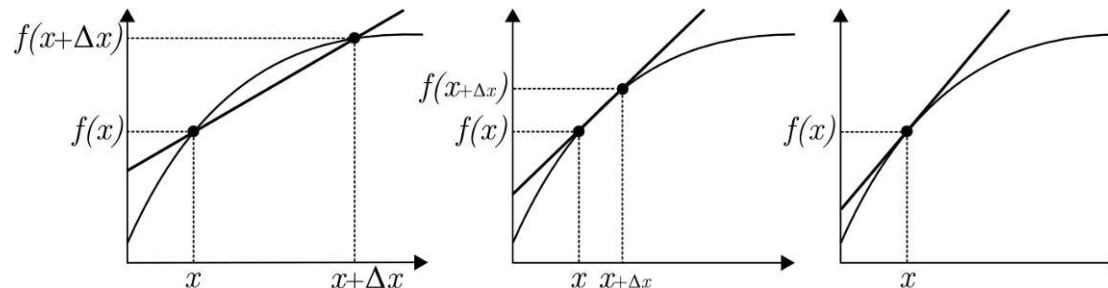
Učenec by řekl: *lineární harmonický oscilátor*

Když se řekne lineární

- Jak se to má s linearitou zjistíte, když se zamyslíte nad některými „operátory“, které běžně používáme.

Čili: kde se vzala *derivace* (funkce v bodě)?

A co je to *diferenciál*?



Když se řekne lineární

- Jak se to má s *energií* v lineárním světě?

Energie je „kvadratická forma“

$$W = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})$$

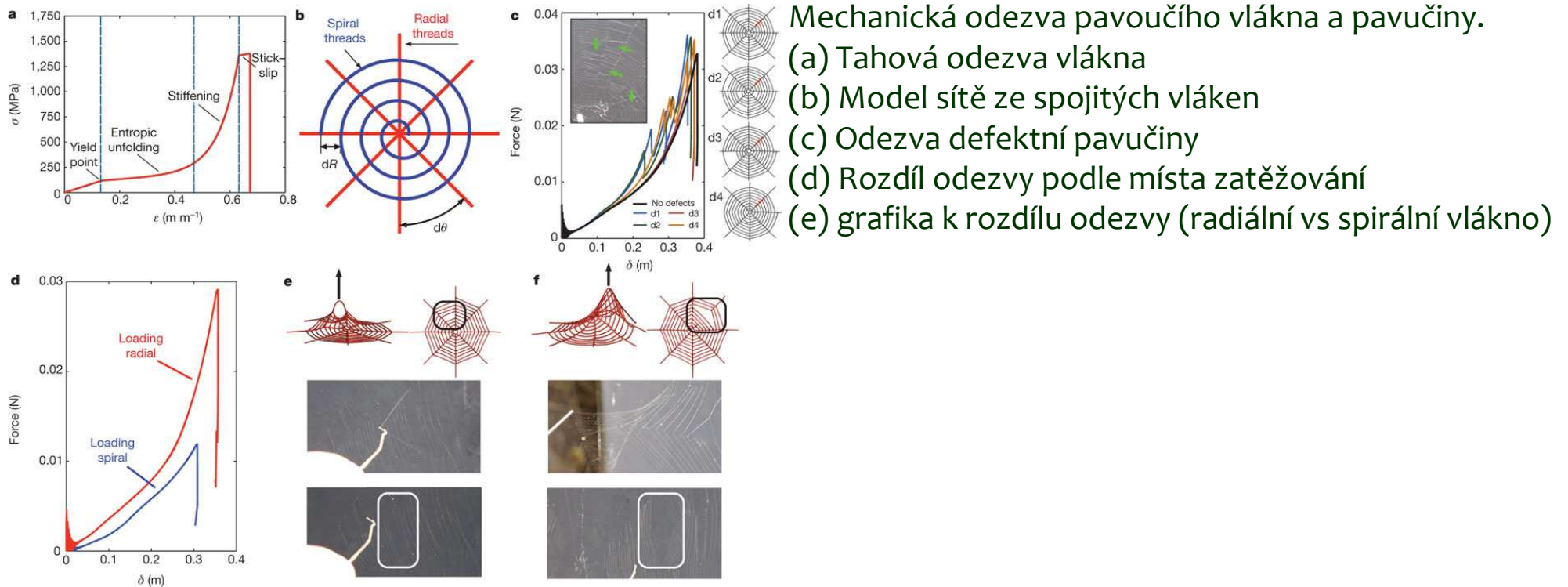
$$W = \frac{1}{2}E \boldsymbol{\varepsilon}^2$$

- Promyslete si sami, proč potenciální energie hmoty v tíhovém poli napíšeme

$$W = mgh$$

Aneb, kam zmizela druhá mocnina?

Když se řekne „nelineární“



Druhy a zdroje nelinearit

Nelinearita se v problému objeví v nějakém okamžiku formulace modelu.

Takže, co náš model – úloha „pružnosti“ – obsahuje?

Rovnice rovnováhy

Geometrické rovnice

Konstitutivní rovnice

Okrajové a počáteční podmínky

Druhy a zdroje nelinearit

▪ Rovnice rovnováhy

$$\mathit{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = D(\rho\mathbf{v})/Dt$$

↑
Lineární člen

↑
Pole objemových sil
může být nelineární

↑
Obsahuje nelinearitu skrze
materiálovou derivaci
 $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\mathit{grad}\mathbf{v}$

Druhy a zdroje nelinearit

■ Geometrické rovnice

Vyjádření tenzoru deformace

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

Kompatibilita deformace

$$\partial^2 \varepsilon_{ij} / \partial x_k \partial x_l + \partial^2 \varepsilon_{kl} / \partial x_i \partial x_j - \partial^2 \varepsilon_{ik} / \partial x_j \partial x_l - \partial^2 \varepsilon_{jl} / \partial x_i \partial x_k = 0$$

Týká se pouze úloh řešených přímo v deformacích.

Předpokládaný tvar posuvů/deformace

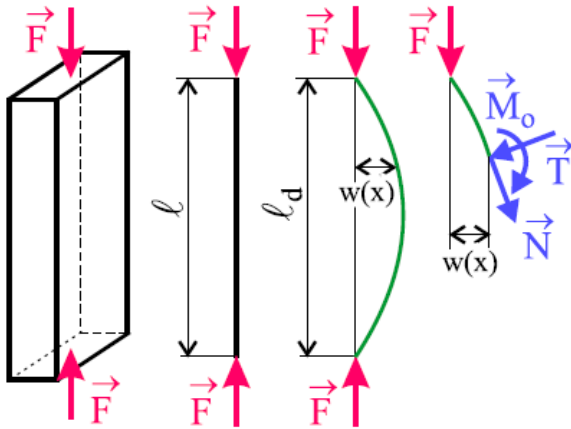
Např. konstantnost deformace v prostoru... týká se pouze analytických úloh.

Geometrická nelinearita

- Velké posuvy

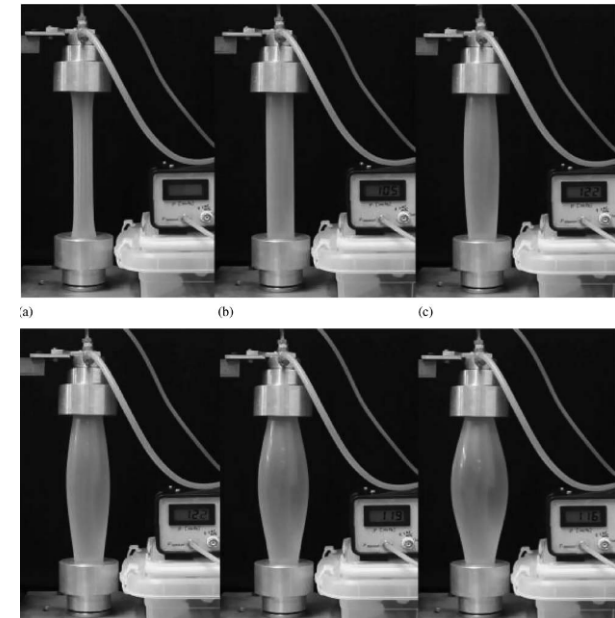
V

- Velké deformace



$$M_o(x) - Fw(x) = 0$$

Velké posuvy nemusí nutně znamenat geometrickou nelinearitu



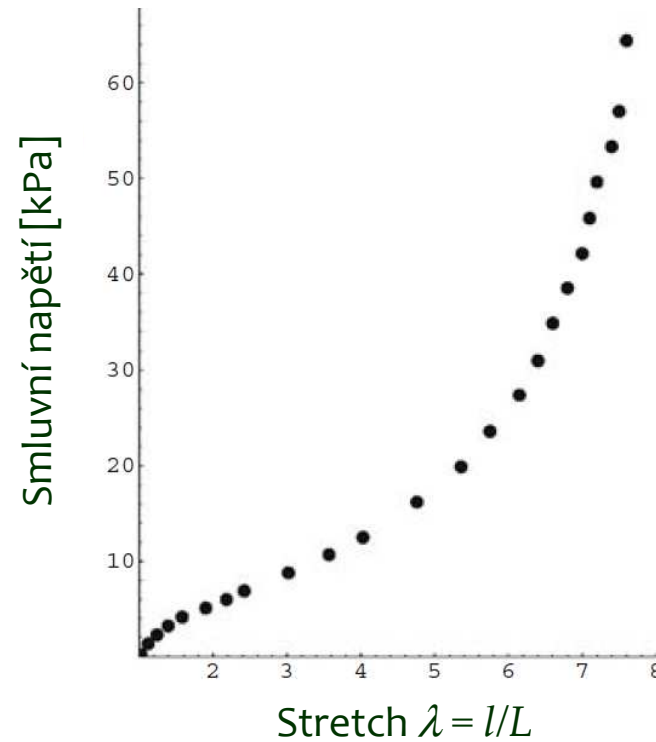
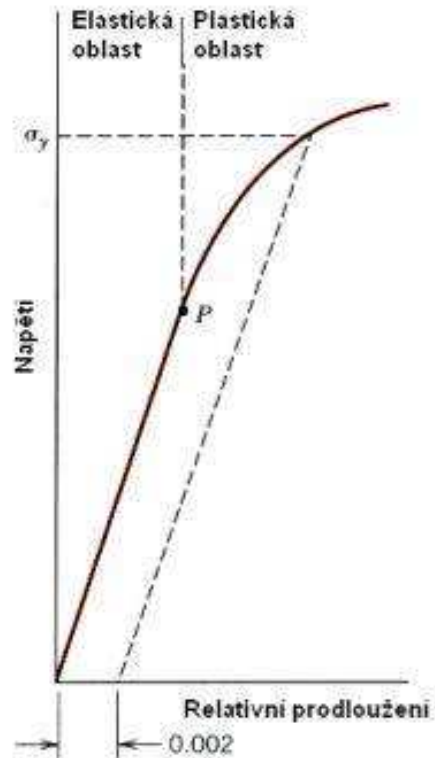
Uvažujte deformaci jako poměr poloměrů na konci a na začátku nafukování

Velké deformace

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

VS

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i + \partial u_k / \partial x_i \cdot \partial u_k / \partial x_j)$$

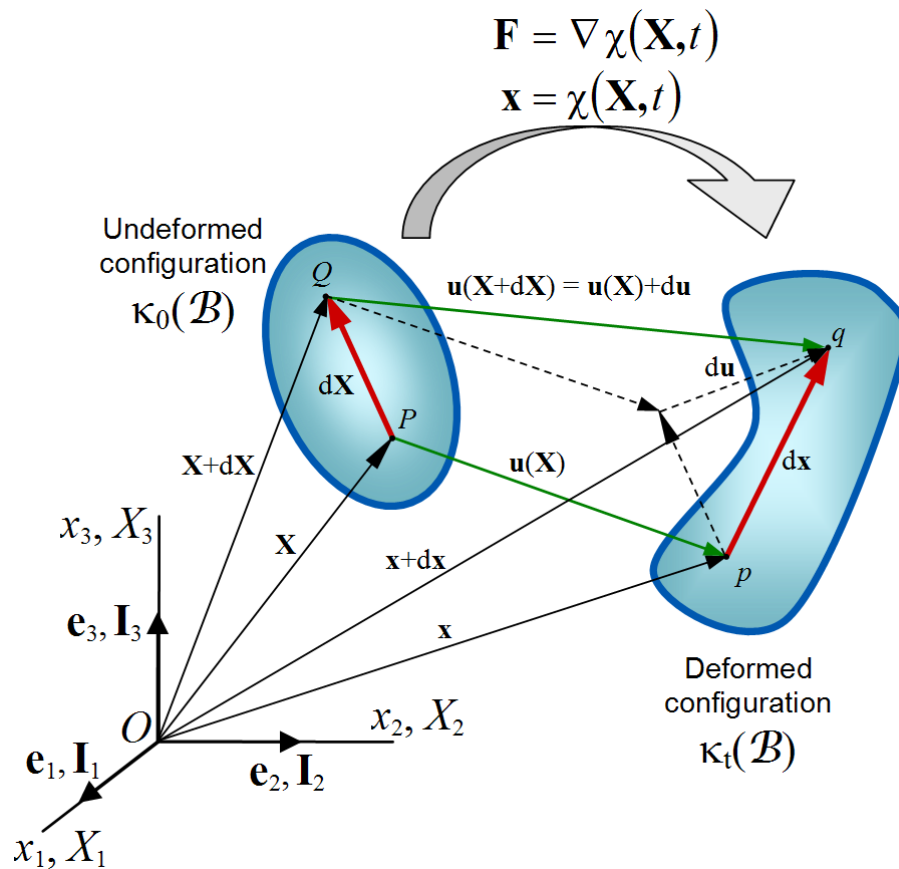


Zdroj: <http://www.ped.muni.cz/wphy/fyzvla/>

Pryž – LRG Treloar (1944)

Velké deformace

- Vycházíme z *deformačního gradientu* \mathbf{F}



$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \text{Grad} \mathbf{x}$$

$$F_{iK} = \partial x_i / \partial X_K$$

Musíme rozlišovat mezi počáteční (materiálovou) a průběžnou (prostorovou) konfigurací

Velké deformace

- Odvozujeme několik měr deformace
(a každá je energeticky konjugovaná s nějakou mírou napětí)

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Green-Lagrangeův

$$\mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

Pravý tenzor strečů

$$\ln \mathbf{U}$$

Henckyho tenzor deformace

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

levý Cauchy-Greenův

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1})$$

Euler-Almansiho

Velké deformace

■ Příklad – Homogenní deformace

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Tenzory deformace pak mají tvar:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\ln \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^{-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \lambda_3^{-2}) \end{pmatrix}$$

Velké deformace

■ Pozor!

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Maticová reprezentace totiž neukazuje bázové vektory...

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + 0(2\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + 0(2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3)$$

Referenční báze $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$

Průběžná báze $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

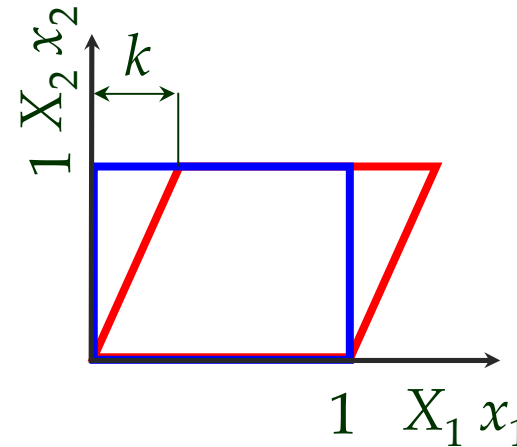
Velké deformace

- Pozor také na nesymetrické tenzory!

Obecně totiž neplatí $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$

Uvažujme prostý smyk podle obrázku

$$x_1 = X_1 + kX_2 \quad \wedge \quad x_2 = X_2 \quad \wedge \quad x_3 = X_3$$



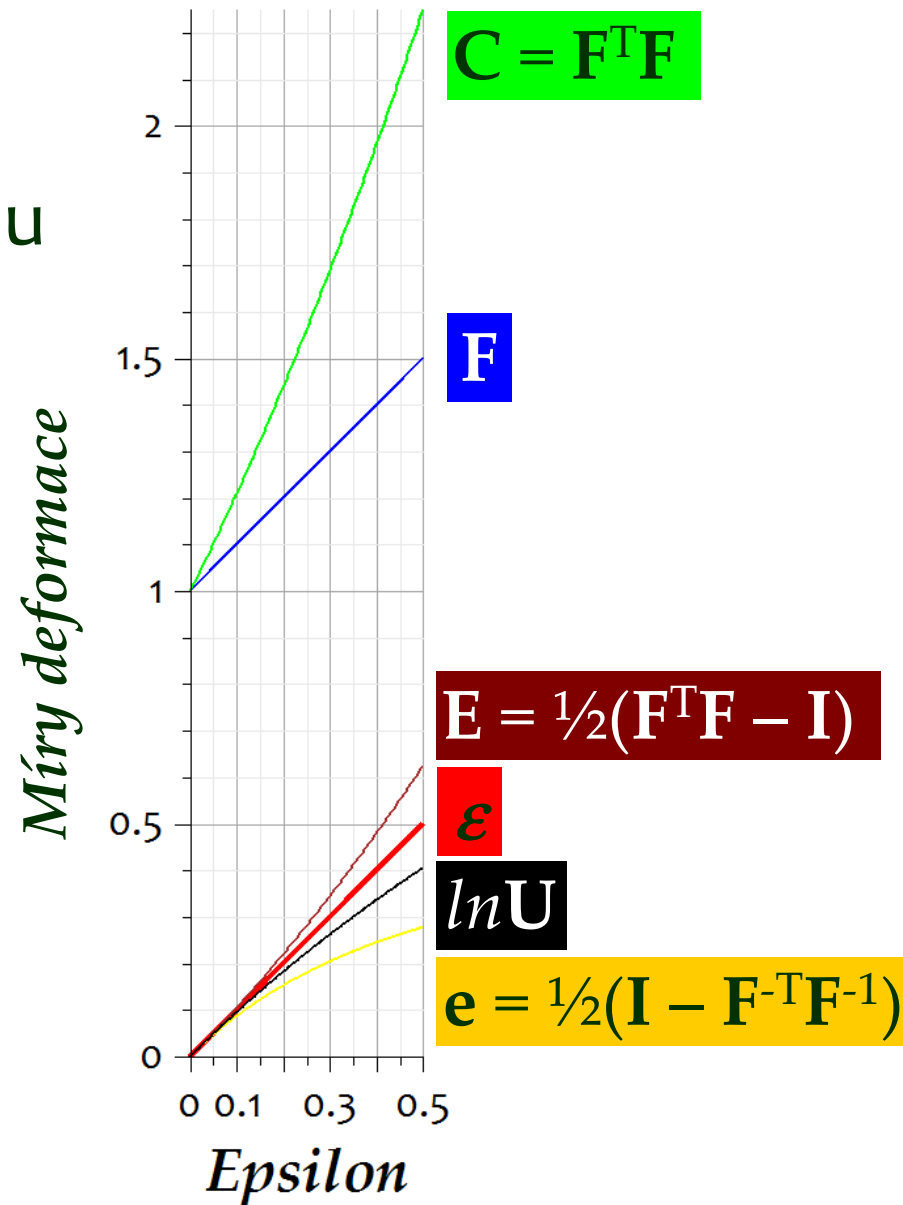
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenzory obsahující v názvu slovo „deformace“ jsou symetrické. Proč?

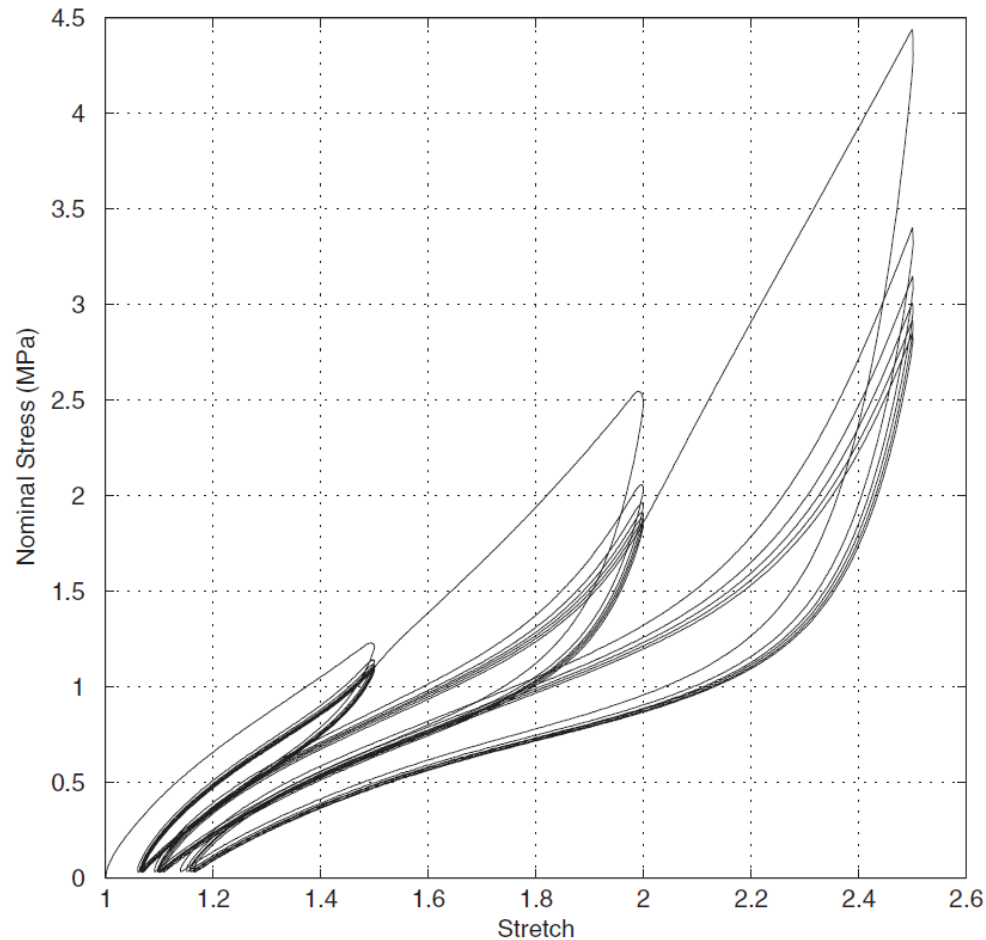
Velké deformace

- Míry deformace při jednoosém tahu

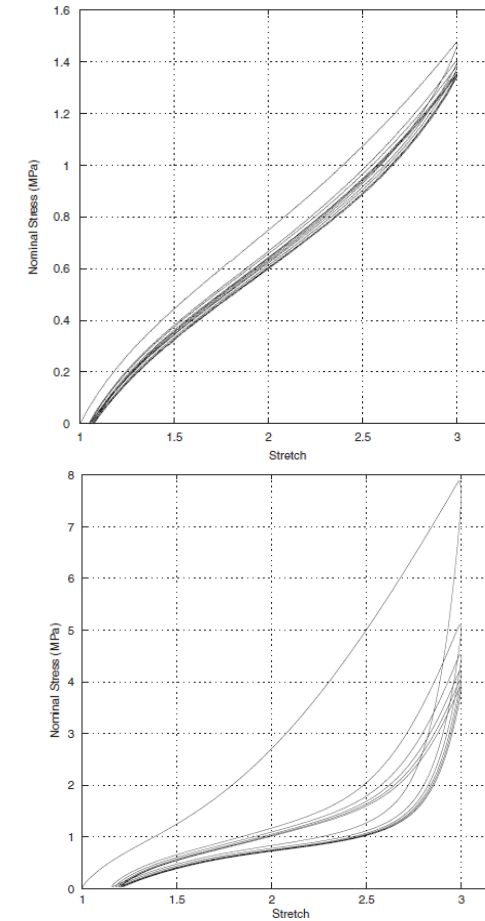
True scale



Materiálová nelinearita



Napětí-deformace při tahové zkoušce pryže

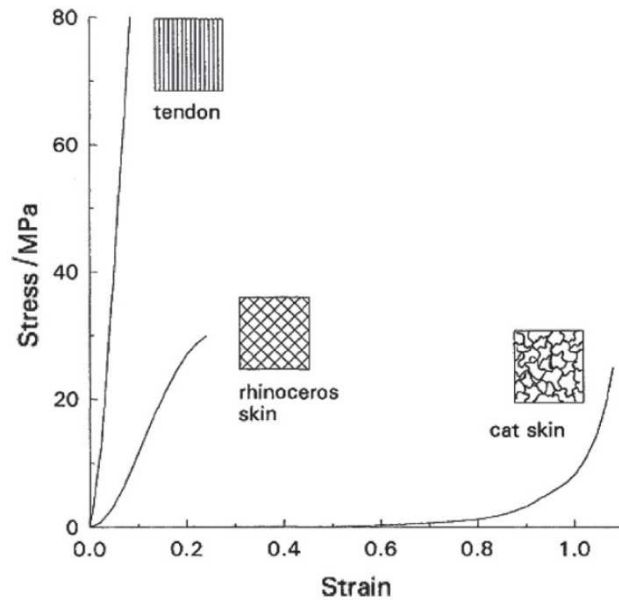


Odezva podle množství plniva (1% vs 60%) umožňující vulkanizaci

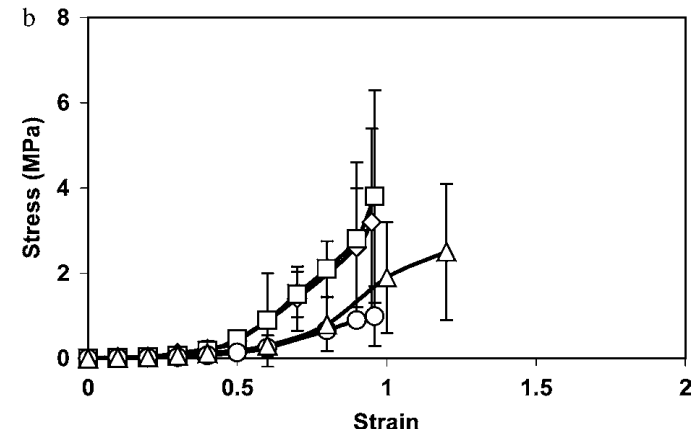
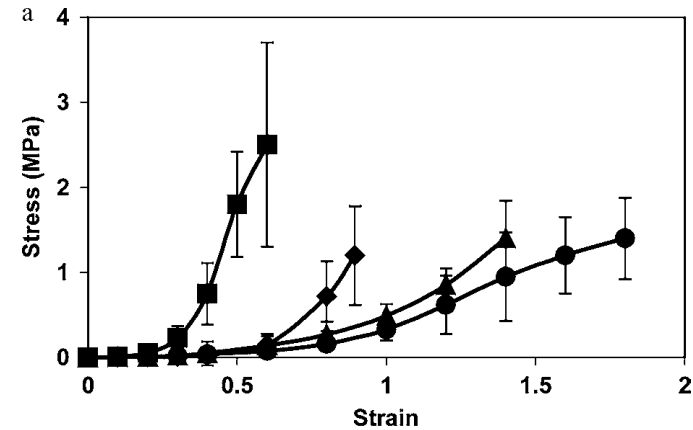
[Dorfmann A., Ogden R.W. \(2004\) A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber. Int J Solid Struct 41 \(7\):1855-1878.](#)

Materiálová nelinearita

■ Měkké tkáně



Napětí-deformace pro šlachy,
nosorožčí a kočičí kůži



Napětí-deformace pro prasečí
cévy: aorta \diamond , vena cava \square ,
a. iliac Δ , a. carotis \circ

Materiálová nelinearita

- Jak efektivně popsat nelineární materiál?

A. L. Cauchy

vs.

G. Green

Konstitutivní rovnice tvoříme přímo (soustavou algebraických nebo diferenciálních) rovnic

Předpokládáme existenci elastického potenciálu – *hyperelasticita*

Obdobně jako zobecněný Hookeův zákon

Složky tenzoru napětí dostaneme jako intenzitu elastického pole

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Materiálová nelinearita

■ Připomeňme si tíhový a elektrický potenciál

Potenciál je měrná energie (v případě tíhy na jednotku hmotnosti). Představuje tedy práci, kterou by mohl vykonat jednotkový hmotný bod díky působení tíhového pole.

$$V = U/m = mgh/m = gh$$

Intenzita tíhového pole je pak dána: $\partial V/\partial h = g$

Potenciál elektrického pole náboje q_1 je $V = 1/(4\pi\epsilon)q_1/r$ když potenciální energie přenesená na částici s nábojem q_2 ve vzdálenosti r je $U = 1/(4\pi\epsilon)q_1q_2/r$

Intenzita elektrického pole je pak dána: $E = -\partial V/\partial r = 1/(4\pi\epsilon)q_1/r^2$

Materiálová nelinearita

- Elastická potenciální energie $U = \rho W$

*Hustota deformační energie
(elastický potenciál)*

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

1D formulace Hookeův
zákon

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$W = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

$$\partial W / \partial \varepsilon = E \varepsilon = \sigma$$

Materiálová nelinearita

■ 3D zobecněný Hookeův zákon

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = C\varepsilon$$

$$W = \frac{1}{2}C\varepsilon\varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$$

Ověřte si alespoň pro jednu složku

Materiálová nelinearita

- Elastický potenciál:

Zajišťuje Implicitní splnění 1. zákona termodynamiky

Zjednodušuje práci s nelineární materiálovou závislostí
- mocninná, exponenciální, logaritmická

Umožňuje snadnou implementaci anisotropie

Ve formě volné energie lze snadno rozšířit pro nevratné děje
(viskoelastický potenciál)

Implementováno v MKP balících

Materiálová nelinearita

■ Biomechanika

V posledních padesáti letech se ukázal jako nejúspěšnější (u měkkých tkání – kůže, cévy, srdce, vazy,...) model pro W navržený *Y.C. Fungem* (1967)

$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha\varepsilon^2} - 1 \right)$$

■ Elastomery

Velice úspěšný model navržen *R.W. Ogdenem* (1972)

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 \right)$$

Materiálová nelinearita

- Objektivita W

$$W = W(\varepsilon_{ij})$$

Invariance W vůči transformaci souřadnic bude nejnáze zajištěna formulací pomocí invariantů tenzoru deformace

Globální vs. Lokální v MKP

R. S. Rivlin

Důsledná aplikace invariantů

Dnes existuje algebraická teorie konstitutivních rovnic (čili skalárních funkcí tenzorové proměnné)

Materiálová nelinearita

■ Invarianty \mathbf{C}

Uvažujme homogenní deformaci

$$x_1 = \lambda_1 X_1 \wedge x_2 = \lambda_2 X_2 \wedge x_3 = \lambda_3 X_3$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$I_1^{\mathbf{C}} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$= I_1^{\mathbf{b}}$$

$$I_2^{\mathbf{C}} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$= I_2^{\mathbf{b}}$$

$$I_3^{\mathbf{C}} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

$$= I_3^{\mathbf{b}}$$

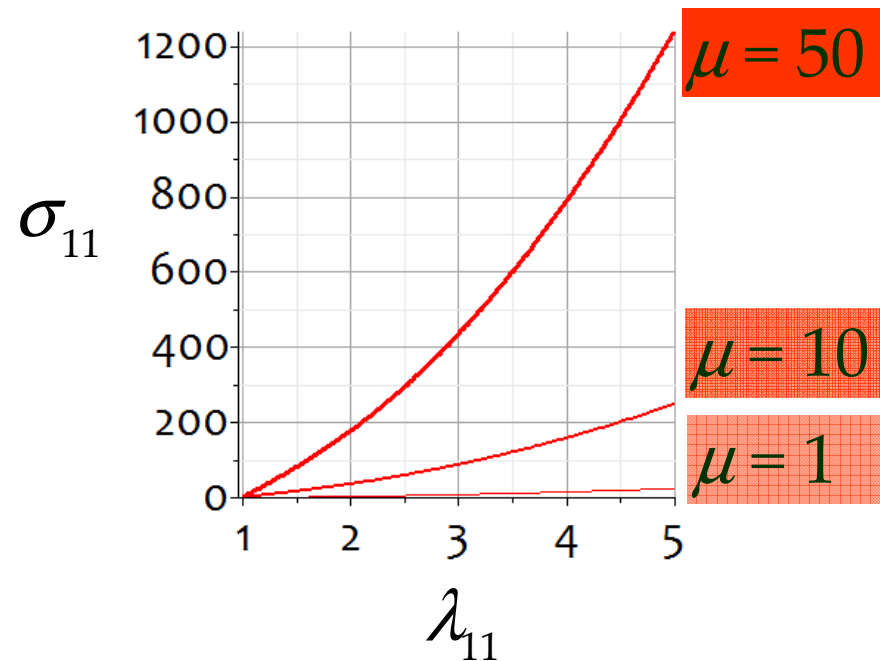
Materiálová nelinearita

■ Neo-Hookeovský materiál

Nejjednodušší model

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

$$\sigma_{11} = \mu \left(\lambda_{11}^2 - \frac{1}{\lambda_{11}} \right)$$

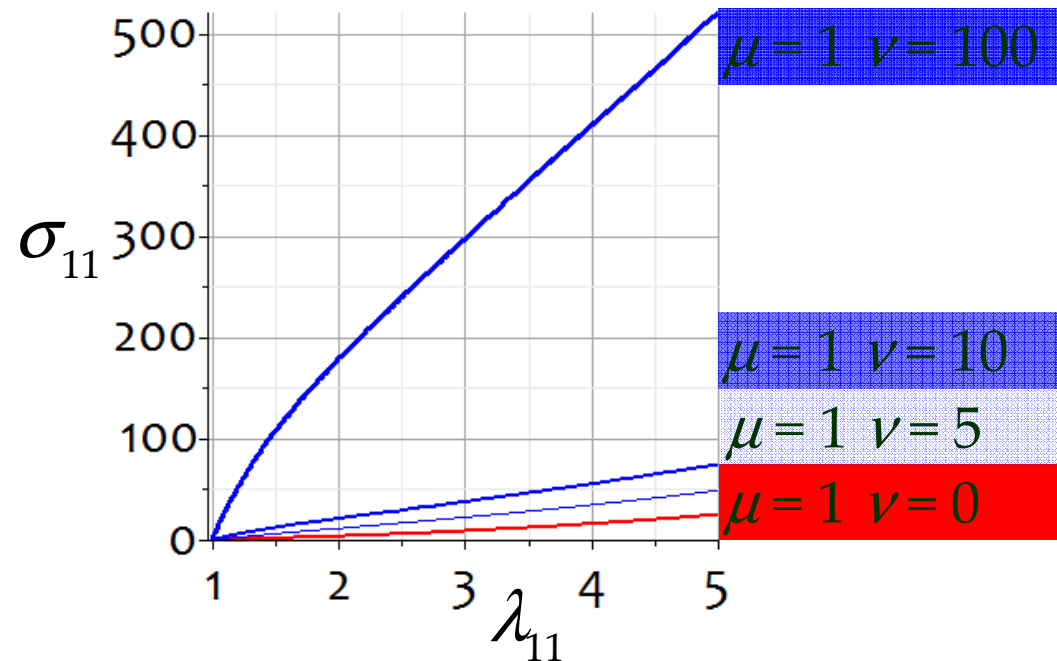
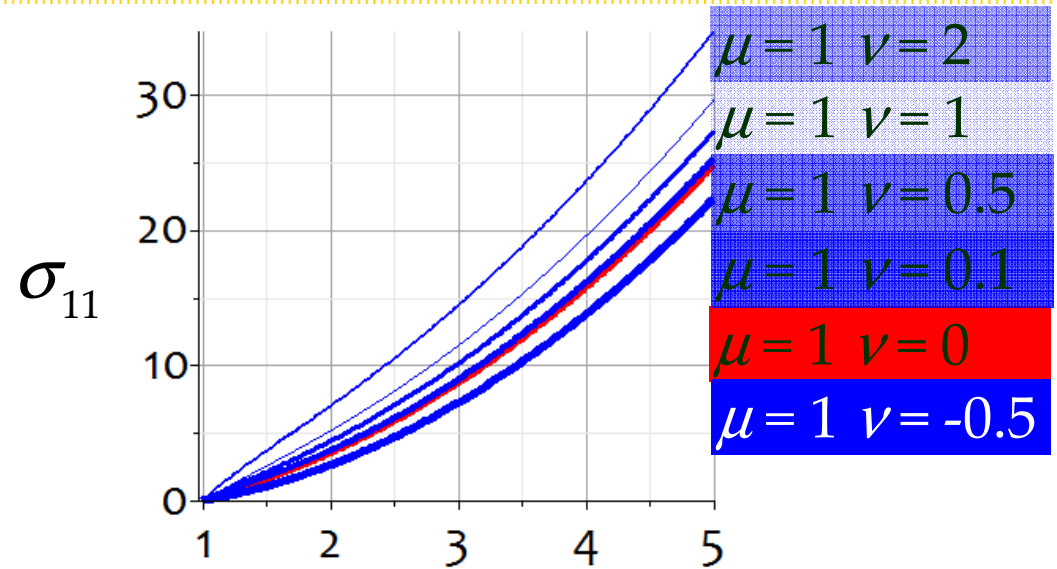


Materiálová nelinearita

■ Mooney-Rivlin

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{\nu}{2}(I_2 - 3)$$

$$\sigma_{11} = \mu \left(\lambda_{11}^2 - \frac{1}{\lambda_{11}} \right) + \nu \left(\lambda_{11} - \frac{1}{\lambda_{11}^2} \right)$$

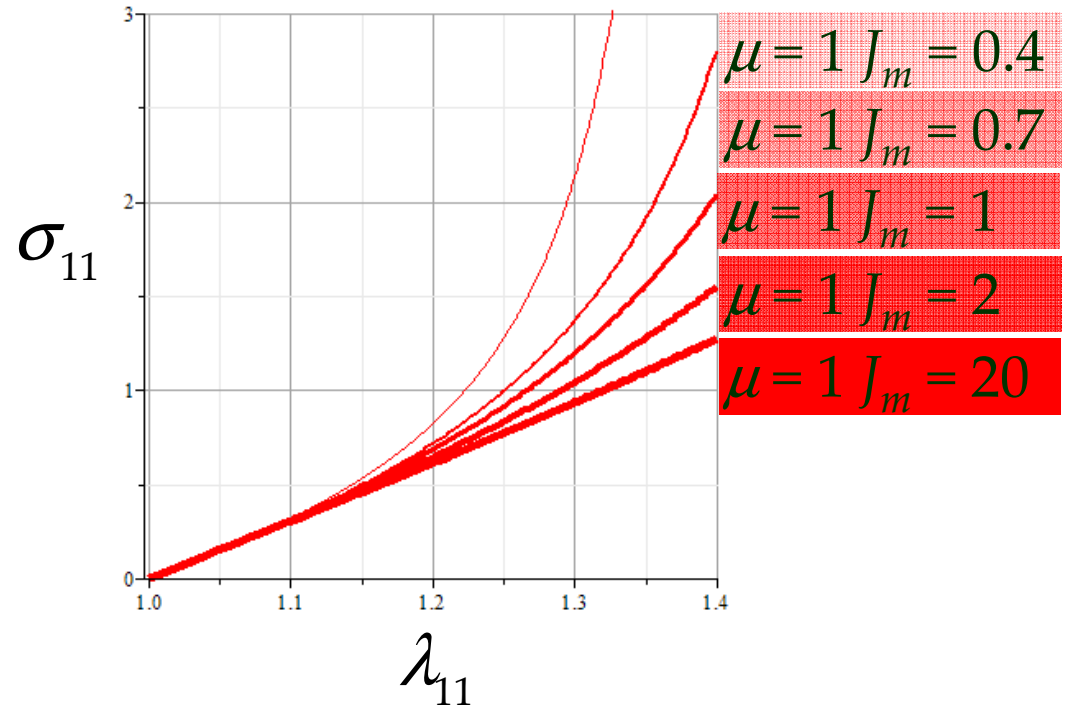


Materiálová nelinearita

■ Gent

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$\sigma_{11} = \frac{\mu J_m \left(\lambda_{11}^2 - \frac{1}{\lambda_{11}} \right)}{J_m - \left(\lambda_{11}^2 + \frac{2}{\lambda_{11}} - 3 \right)}$$



Materiálová nelinearita

- Poznámka

Výše zmíněné modely W byly všechny:

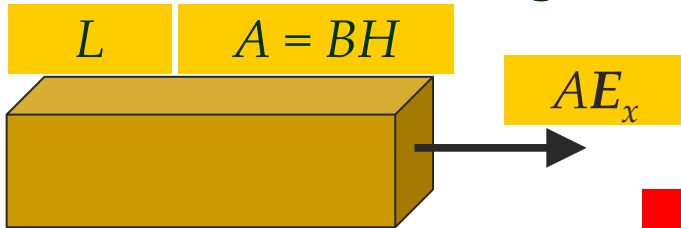
ISOTROPNÍ

U všech jsme předpokládali nestlačitelný materiál

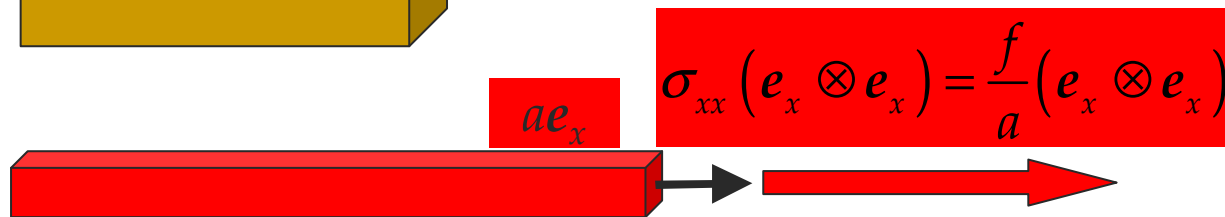
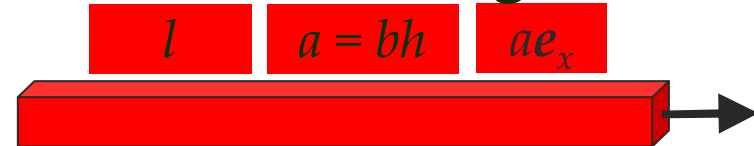
$$J = \det \mathbf{F} = \sqrt{I_3^c} = \sqrt{I_3^b} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

Různé míry deformace dávají různé míry napětí

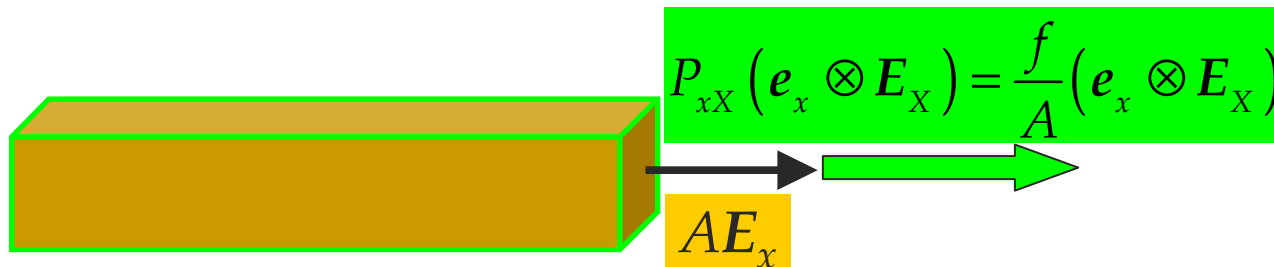
Referenční konfigurace



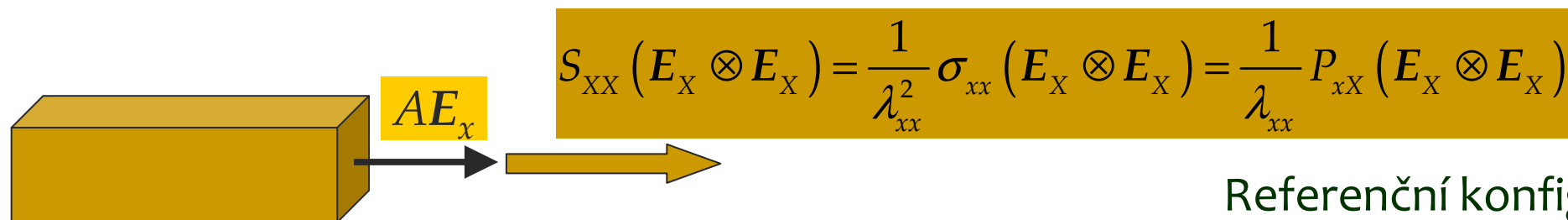
Průběžná konfigurace



Průběžná konfigurace
Skutečné napětí $\sigma = f/a$



Smíšená konfigurace
Smluvní napětí $P = f/A$



Referenční konfigurace
Druhé Piola-Kirchhoffovo napětí $S = \sigma/\lambda_x^2$

Různé míry deformace dávají různé míry napětí

Ještě jednou!

Abychom získali *druhé Piola-Kirchhoffovo napětí* S , transformuje skutečné napětí σ inverzní transformací k transformaci, která proběhla, když síla deformovala průřez do průběžné konfigurace;
čili $A \rightarrow a: a = \lambda_x^2 A$

Druhé Piola-Kirchhoffovo napětí tedy je

$$S_{XX} = (\lambda_x)^{-2} \sigma_{xx}$$

Napětí

■ Transformace mezi tenzory napětí

Znovu připomeňme, že *deformační gradient* \mathbf{F} převádí referenční vektor na zdeformovaný vektor $\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X}$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T$$

Napětí a elastický potenciál

- Míry napětí a deformace jsou konjugovány tak, že práce vnitřních sil (skalár) při deformaci je vždy stejná

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

Nestlačitelný materiál

- Deformace elastomerů a měkkých tkání jsou často modelovány jako isochorické děje

$$J = \frac{dv}{dV} = \mathbf{det} \mathbf{F} = \sqrt{I_3^{\mathbf{C}}} = \sqrt{I_3^{\mathbf{b}}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

- V takovém případě se na „objemových“ složkách tenzoru deformace nekoná na práce vnitřních sil. Takže odpovídající složky napětí nelze přímo určit z W . Zavádíme tudíž je jako neurčitý Lagrangeův multiplikátor p a určujeme z okrajových podmínek.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

$$W = W(\mathbf{C}) + p(J - 1) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}} - p \mathbf{I} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}} - p \mathbf{I}$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1}$$

Nelinearita okrajových podmínek

- Krom rovnic rovnováhy, kinematiky a materiálu, může nelinearita vzniknout i v okrajových podmínkách.

To je typické v kontaktních úlohách.

- Dead loading

Vybrané podpůrné zdroje

http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelastic_material

http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_elastic_material

http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory

http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Continuum_mechanics

http://en.wikiversity.org/wiki/Introduction_to_Elasticity/Tensors

http://en.wikiversity.org/wiki/Continuum_mechanics

<http://fast10.vsb.cz/brozovsky/nlm>

<http://mechanika.johnyho.net/>

Návrhy na úpravy nebo upozornění na chyby adresujte lukas.horny@fs.cvut.cz