

Biomechanika srdečněcévní soustavy a konstitutivní modelování

Biomechanika a lékařské přístroje
Biomechanika I Lukáš Horný



Laboratoř biomechaniky člověka
Ústavu mechaniky Fakulty strojní
ČVUT v Praze

M – Konstitutivní modelování

Hyperelasticita

Teorie

M1 Deformace

M2 Napětí

M3 Jak zahrnout nelinearitu

M4 Jak zahrnout anisotropii

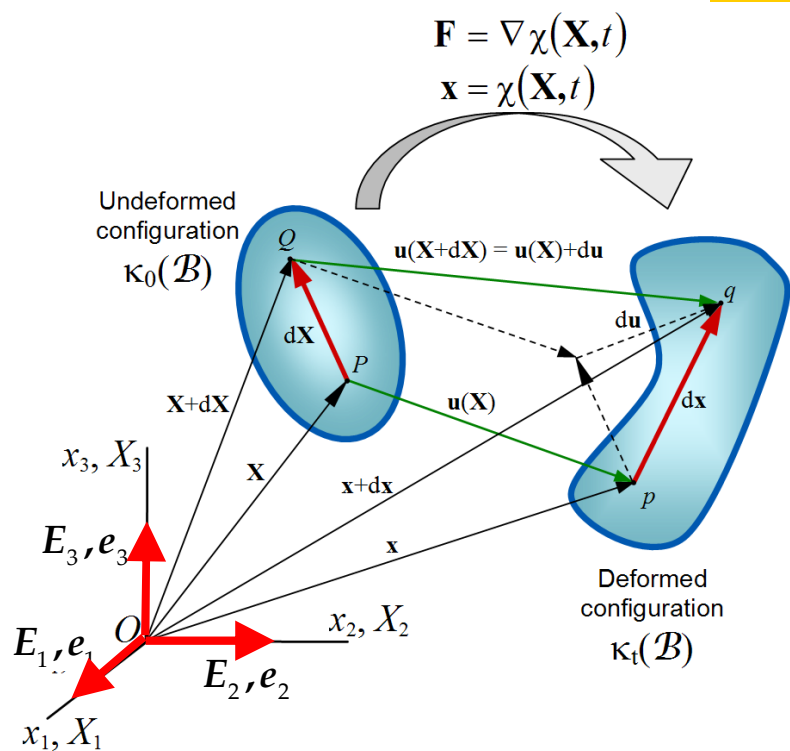
M5 Jak zahrnout viskoelasticitu

Deformace

■ Konfigurace

Referenční konfigurace (materiálové souřadnice)

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

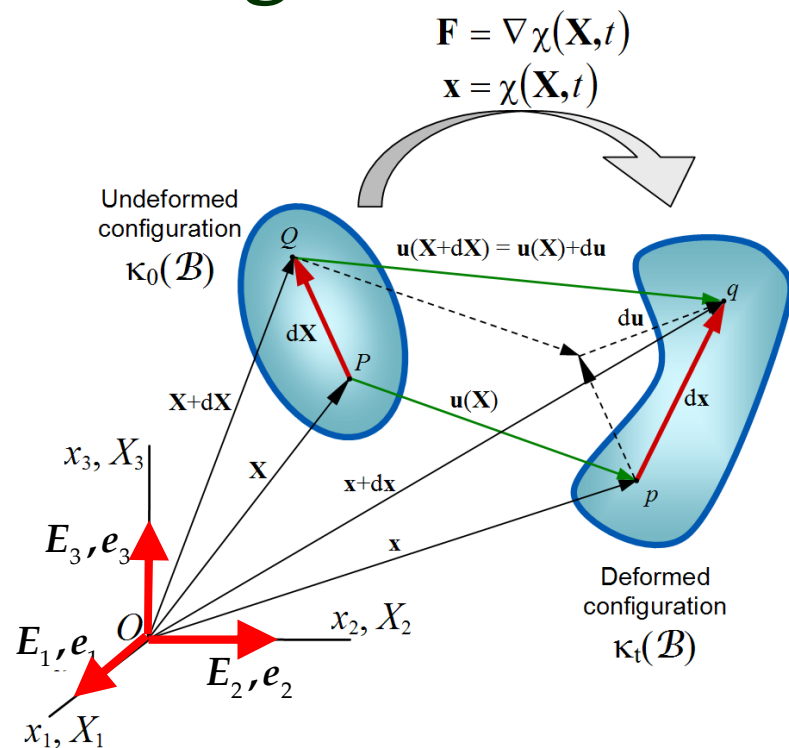


Zdeformovaná neboli průběžná konfigurace (prostorové souřadnice)

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

Deformace

■ Konfigurace



$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$$

$$x_1 = x_1(X_1, X_2, X_3)$$

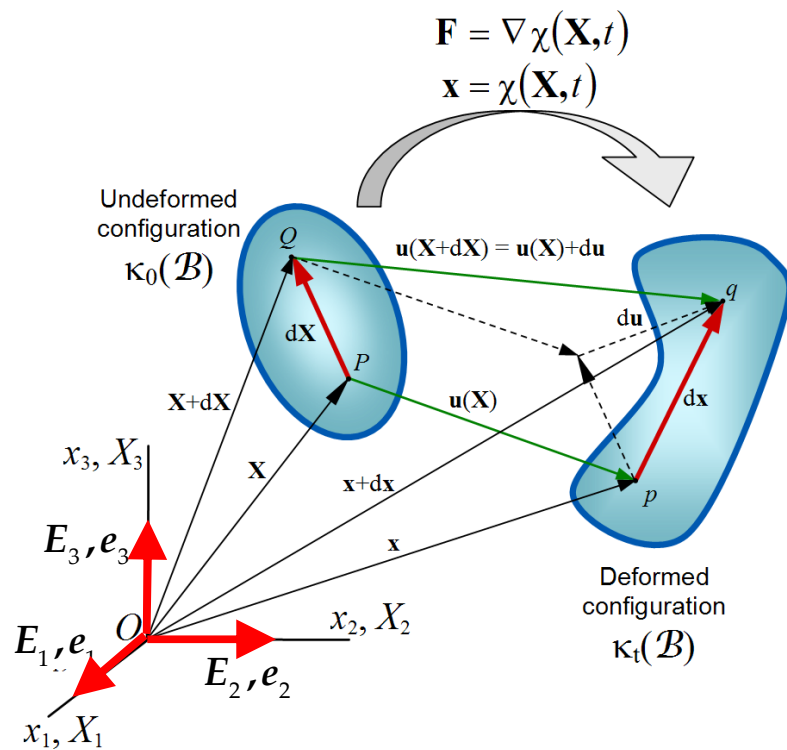
$$x_2 = x_2(X_1, X_2, X_3)$$

$$x_3 = x_3(X_1, X_2, X_3)$$

Vyjadřujeme souřadnice po deformaci x pomocí souřadnic před deformací X (Lagrange).

Deformace

■ Konfigurace



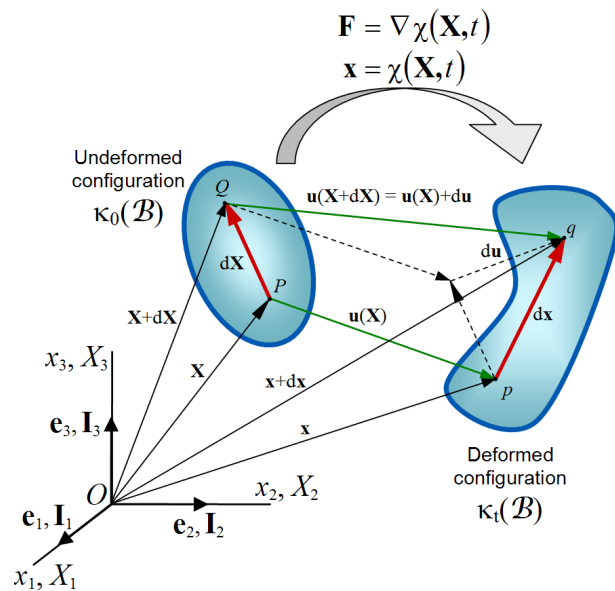
Deformace je zobrazení, které převádí materiálové body z prostoru referenční konfigurace do prostoru průběžné konfigurace.

deformace : $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$

Uvědomme si, že zatímco materiálový bod je unikátní (je to jeden a tentýž bod v celém průběhu deformace), způsobů vyjádření jeho souřadnic je nekonečně mnoho.

Deformace

■ Deformační gradient



$$\text{Deformační gradient } \mathbf{F} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$$

Deformační gradient převádí referenční diferenciální vektor zdeformovaný diferenciální vektor, vyjadřuje tak derivaci $d\mathbf{x}/d\mathbf{X}$.

V matematické analýze při zkoumání lokálního chování funkcí (čili zobrazení z \mathbf{R} do \mathbf{R}) jste se omezili na zkoumání diferenciálu. Totéž provedeme při zkoumání „deformace.“

$$\text{deformace} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$$

čili

$$\text{deformace} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

Deformace

■ Deformační gradient

$$dx = \mathbf{F}dX$$

$$F_{iK} = \partial x_i / \partial X_K$$

Čili rozepsáno po složkách derivujeme tři složky souřadnic podle dalších třech složek souřadnic; celkem tedy devětkrát.

Deformační gradient je tenzor druhého řádu definovaný nad „tenzorovou bází“, která vznikne složením báze počáteční konfigurace a zdeformované.

$$\mathbf{F} = F_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + F_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \dots + F_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + F_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \dots + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3$$

Deformace

■ Deformační gradient

$$\mathbf{F} = F_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + F_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \dots + F_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + F_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{F} = F_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + F_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + F_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + F_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

*Zápis báze často vynecháváme
a tenzor reprezentujeme maticí
jeho složek.*

Deformace

■ Deformační gradient

Deformační gradient v sobě nese informaci o pohybu kontinua v bodě. Tato informace se skládá z takzvaných „strečů“ a rotace elementu jako tuhého celku.

Polární rozklad

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}$$

Velké deformace

- Odvozujeme několik měr deformace
(a každá je energeticky konjugovaná s nějakou mírou napětí)

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Green-Lagrangeův

$$\mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

Pravý tenzor strečů

$$\ln \mathbf{U}$$

Henckyho tenzor deformace

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

levý Cauchy-Greenův

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1})$$

Euler-Almansiho

Velké deformace

■ Příklad – Homogenní deformace

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Tenzory deformace pak mají tvar:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\ln \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^{-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \lambda_3^{-2}) \end{pmatrix}$$

Velké deformace

■ Pozor!

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Maticová reprezentace totiž neukazuje bázové vektory...

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + 0(2\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + 2\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + 0(2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3)$$

Referenční báze $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$

Průběžná báze $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

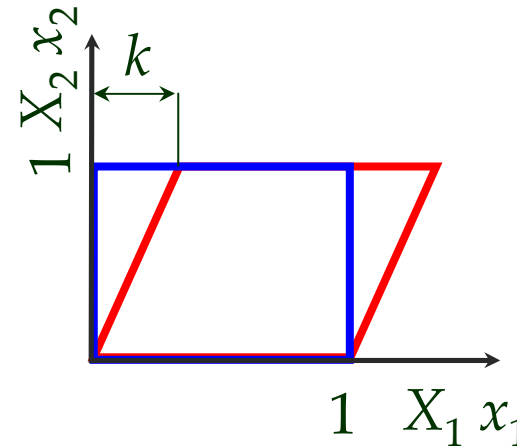
Velké deformace

- Pozor také na nesymetrické tenzory!

Obecně totiž neplatí $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$

Uvažujme prostý smyk podle obrázku

$$x_1 = X_1 + kX_2 \quad \wedge \quad x_2 = X_2 \quad \wedge \quad x_3 = X_3$$



$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

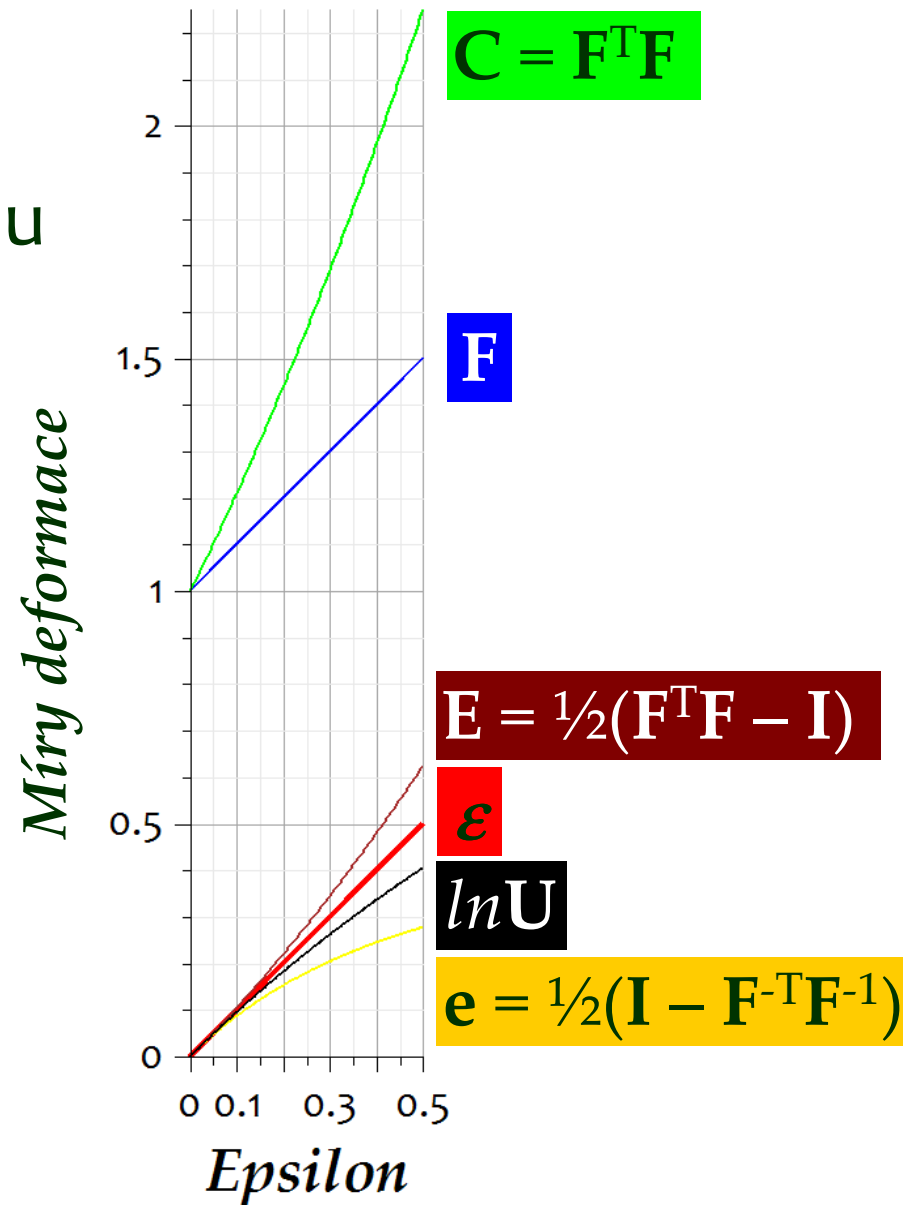
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenzory obsahující v názvu slovo „deformace“ jsou symetrické. Proč?

Deformace

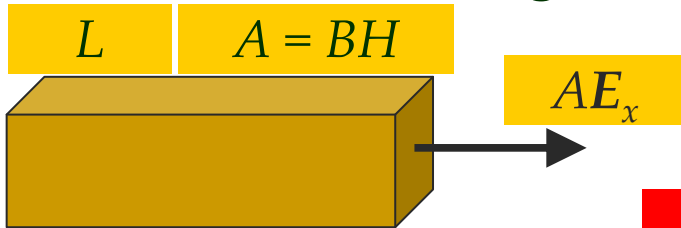
- Míry deformace při jednoosém tahu

True scale

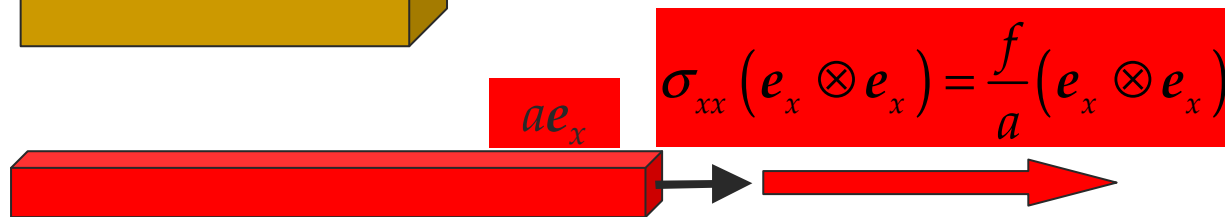
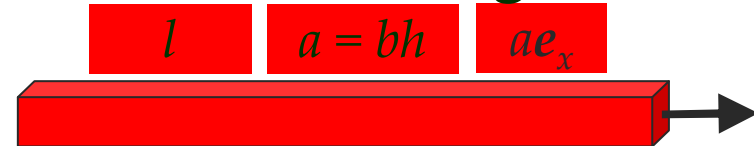


Různé míry deformace dávají různé míry napětí

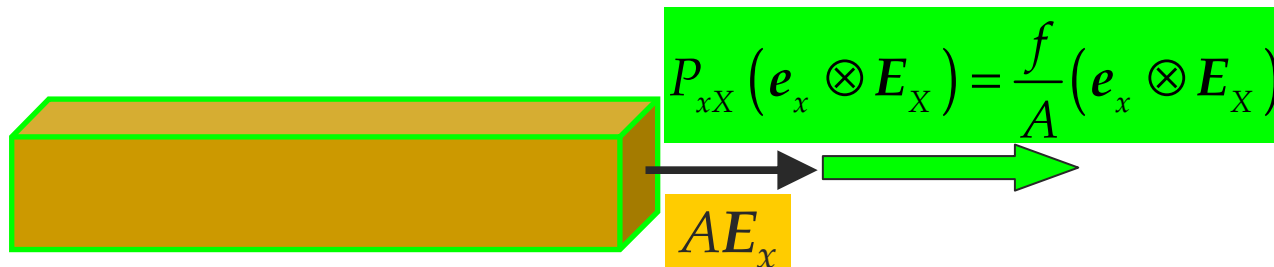
Referenční konfigurace



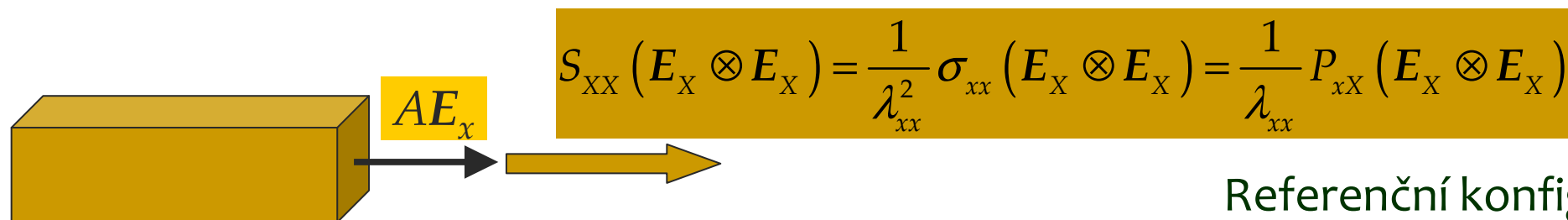
Průběžná konfigurace



Průběžná konfigurace
Skutečné napětí $\sigma = f/a$



Smíšená konfigurace
Smluvní napětí $P = f/A$



Referenční konfigurace

Druhé Piola-Kirchhoffovo napětí $S = \sigma / \lambda_x^2$

Různé míry deformace dávají různé míry napětí

Ještě jednou!

Abychom získali *druhé Piola-Kirchhoffovo napětí* S , transformuje skutečné napětí σ inverzní transformací k transformaci, která proběhla, když síla deformovala průřez do průběžné konfigurace;
čili $A \rightarrow a: a = \lambda_x^2 A$

Druhé Piola-Kirchhoffovo napětí tedy je

$$S_{XX} = (\lambda_x)^{-2} \sigma_{xx}$$

Napětí

■ Transformace mezi tenzory napětí

Znovu připomeňme, že *deformační gradient* \mathbf{F} převádí referenční vektor na zdeformovaný vektor $\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X}$

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T$$

Hyperelasticita

■ Připomeňme si tíhový a elektrický potenciál

Potenciál je měrná energie (v případě tíhy na jednotku hmotnosti). Představuje tedy práci, kterou by mohl vykonat jednotkový hmotný bod díky působení tíhového pole.

$$V = U/m = mgh/m = gh$$

Intenzita tíhového pole je pak dána: $\partial V/\partial h = g$

Potenciál elektrického pole náboje q_1 je $V = 1/(4\pi\epsilon)q_1/r$ když potenciální energie přenesená na částici s nábojem q_2 ve vzdálenosti r je $U = 1/(4\pi\epsilon)q_1q_2/r$

Intenzita elektrického pole je pak dána: $E = -\partial V/\partial r = 1/(4\pi\epsilon)q_1/r^2$

Hyperelasticita

- Elastická potenciální energie $U = \rho W$

*Hustota deformační energie
(elastický potenciál)*

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

1D formulace Hookeův
zákon

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$W = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

$$\partial W / \partial \varepsilon = E \varepsilon = \sigma$$

Hyperelasticita

■ 3D zobecněný Hookeův zákon

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = C\varepsilon$$

$$W = \frac{1}{2}C\varepsilon\varepsilon$$

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$$

Ověřte si alespoň pro jednu složku

Hyperelasticita

- Elastický potenciál:

Zajišťuje Implicitní splnění 1. zákona termodynamiky

Zjednodušuje práci s nelineární materiálovou závislostí
- mocninná, exponenciální, logaritmická

Umožňuje snadnou implementaci anisotropie

Ve formě volné energie lze snadno rozšířit pro nevratné děje
(viskoelastický potenciál)

Implementováno v MKP balících

Napětí a elastický potenciál

- Míry napětí a deformace jsou konjugovány tak, že práce vnitřních sil (skalár) při deformaci je vždy stejná

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad \boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

Nestlačitelný materiál

- Deformace elastomerů a měkkých tkání jsou často modelovány jako isochorické děje

$$J = \frac{dv}{dV} = \mathbf{det} \mathbf{F} = \sqrt{I_3^{\mathbf{C}}} = \sqrt{I_3^{\mathbf{b}}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

- V takovém případě se na „objemových“ složkách tenzoru deformace nekoná na práce vnitřních sil. Takže odpovídající složky napětí nelze přímo určit z W . Zavádíme tudíž je jako neurčitý Lagrangeův multiplikátor p a určujeme z okrajových podmínek.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-\mathbf{T}}$$

$$W = W(\mathbf{C}) + p(J - 1) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}} - p \mathbf{I} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}} - p \mathbf{I}$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1}$$

Tvary konstitutivních modelů

- Fungův exponenciální tvar
(1967, 1979, 1983)

Lineární závislost mezi tuhostí a napětím

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a + b\sigma \quad \longrightarrow \quad \sigma = \frac{a}{b} (e^{b\varepsilon} - 1)$$

$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha(I_1 - 3)} - 1 \right)$$

$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - 1 \right) \quad +p(J-1)$$

Tvary konstitutivních modelů

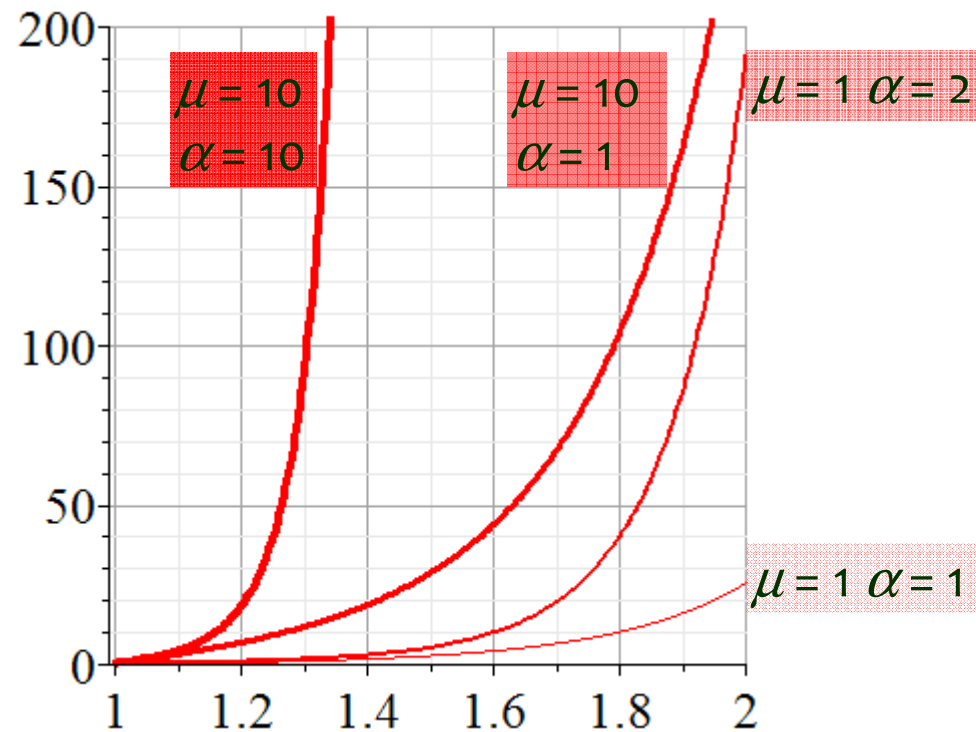
■ Jednoosý tah $W = \frac{\mu}{2\alpha} \left(e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} - 1 \right)$

$$\sigma_{11} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \mu \lambda_1 e^{\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)} \quad \sigma_{33} = 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \wedge \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\sigma_{22} = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p$$

$$\sigma_{33} = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p$$

$$\sigma_{11} = \mu e^{\alpha \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right)} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$



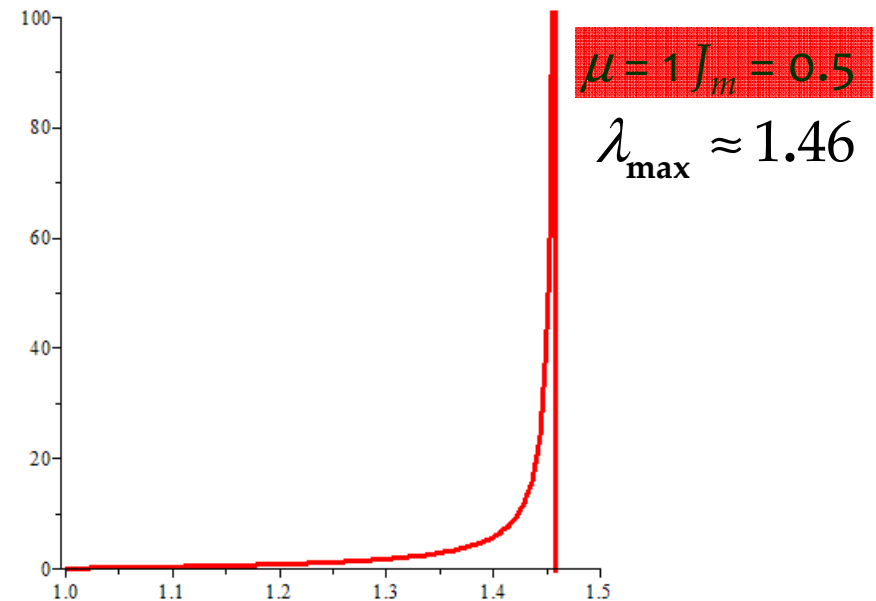
Tvary konstitutivních modelů

- Gentův logaritmický tvar
(1996)

„Large strain stiffening“ je převeden na „limitovanou“ průtažnost.

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{I_1 - 3}{J_m} \Rightarrow J_m + 3 > I_1$$



Tvary konstitutivních modelů

■ Jednoosý tah $W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m} \right)$

$$\sigma_{11} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu J_m \lambda_1}{J_m - I_1 + 3}$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad \wedge \quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad \wedge \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

$$\sigma_{22} = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p$$

$$\sigma_{33} = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p$$

$$\sigma_{11} = \frac{\mu J_m \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right)}{J_m - \left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right)}$$

