

# NAMÁHÁNÍ TEPENNÉ STĚNY: LIDSKÁ BŘIŠNÍ AORTA



Kurs: Biomechanika II

Obor: Biomechanika a lékařské přístroje

Program: Magisterský

Fakulta strojní ČVUT v Praze

**Lukáš Horný**

lukas.horny@fs.cvut.cz

# CÍLE

Analytickými metodami získat  
kvantitativní odhad napjatosti  
tepenné stěny

Tenkostěnná vs. silnostěnná aproximace

Elastostatika (nelineární materiál)

Konečné deformace

Zbytková napětí

Jako příklad poslouží lidská břišní aorta

# MOTIVACE

**Numerické metody budou v klinicky podstatných úlohách,**

*optimalizace implantace stentu (z hlediska přetížení)*

*nápojení bypassu (opět přetížení)*

*napětí na rozhraní kalcifikovaný plát-stěna*

*interakce tepenné stěny s krví (zejména v místech plátů)*

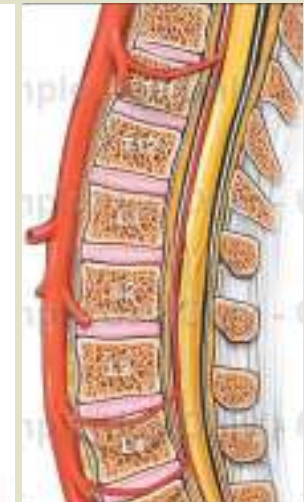
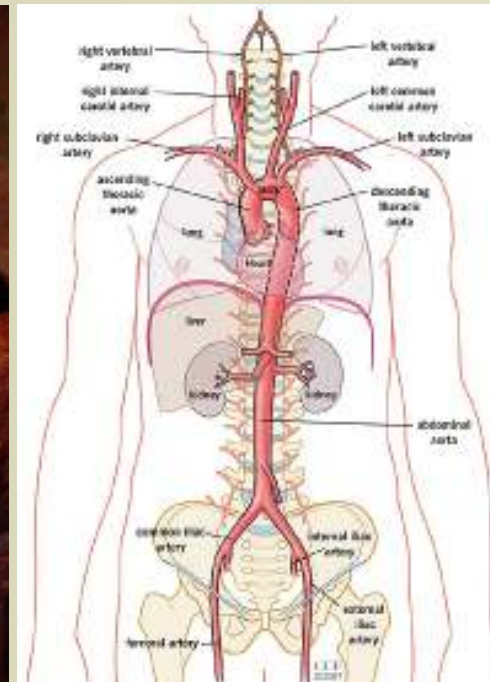
*disekce stěny a ruptura aneurysmatu*

atd., **vždy hrát prim.**

Analytické metody neslouží (jak by se v „rakousko-uherské tradici“ výkladu matematiky a fyziky bohužel mohlo někdy zdát) k memorování výrazů, ale k pochopení kvalitativních vlastností řešení, na nichž je testována hodnověrnost výsledků numerických metod.

# AD REM

## Břišní aorta – kde to je, co to je?



Repro: <http://www.doereport.com/enlargeexhibit.php?ID=15311>

Repro: <http://my.clevelandclinic.org/heart/heart-blood-vessels/aorta.aspx>

# AD REM

## Břišní aorta – kde to je, co to je?



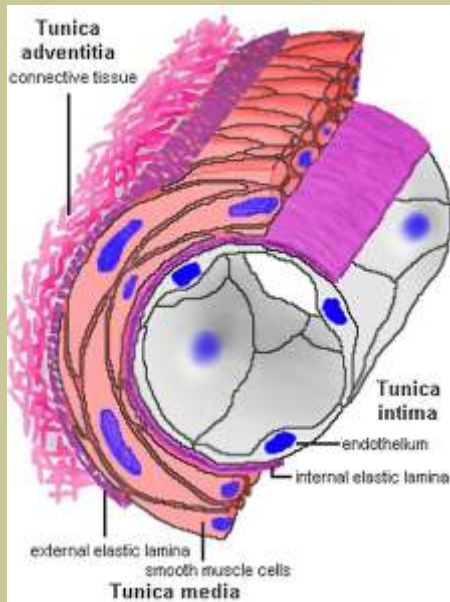
- 1 Right lung
- 2 Right hepatic vein
- 3 Liver
- 4 Left hepatic vein
- 5 Stomach
- 6 Left colic flexure  
(splenic flexure of the colon)
- 7 Spleen
- 8 Left lung
- 9 Aorta

Repro: [http://www.info-radiologie.ch/en/abdominal\\_ct.php#](http://www.info-radiologie.ch/en/abdominal_ct.php#)



# AD REM

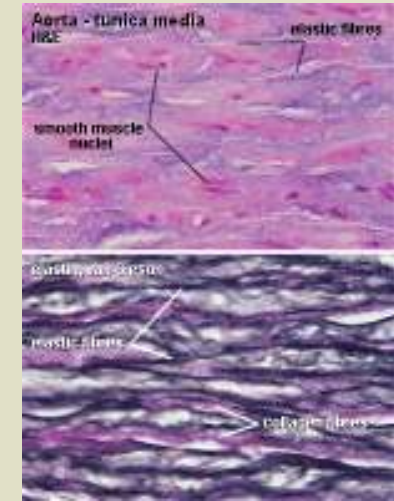
## Je to elastická tepna



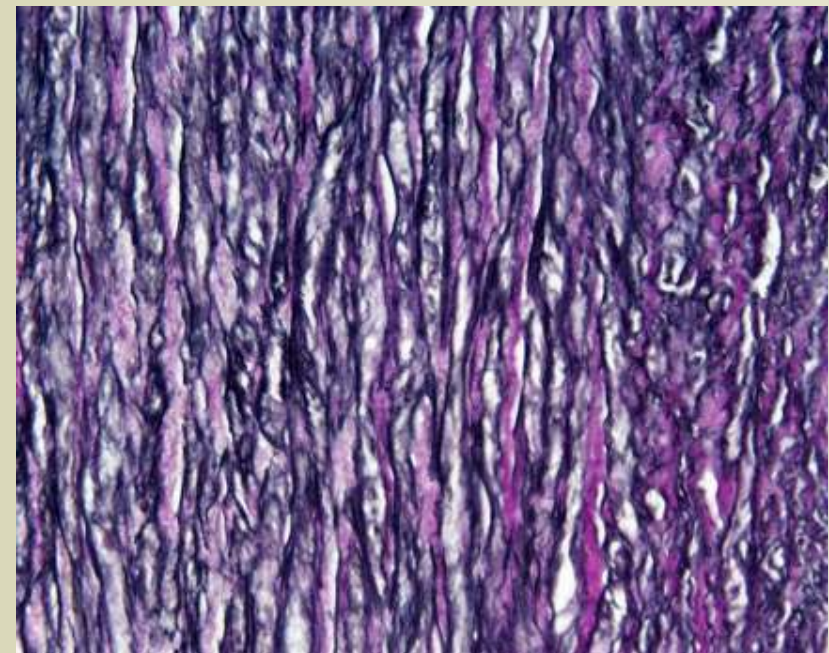
Repro: [http://php.med.unsw.edu.au/embryology/index.php?title=File:Blood\\_vessel\\_wall\\_cartoon.jpg](http://php.med.unsw.edu.au/embryology/index.php?title=File:Blood_vessel_wall_cartoon.jpg)



Repro: <http://www.lab.anhb.uwa.edu.au/mb140/corepages/vascular/vascular.htm>

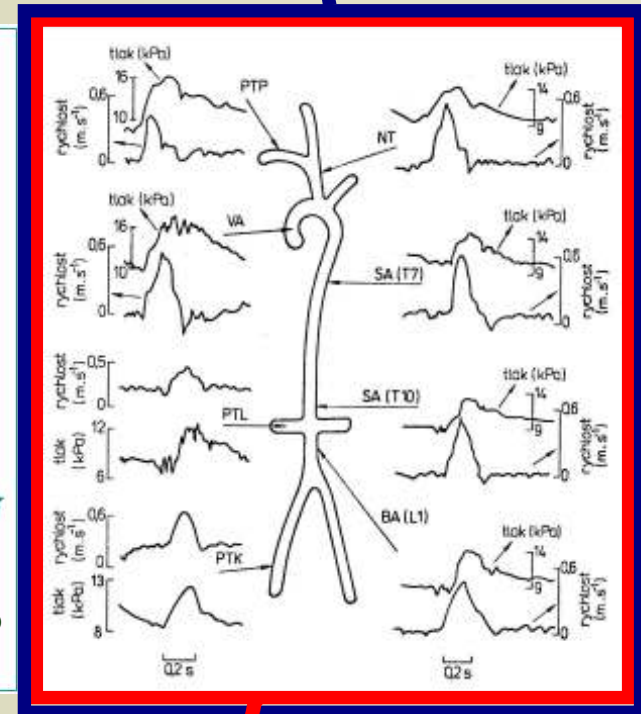
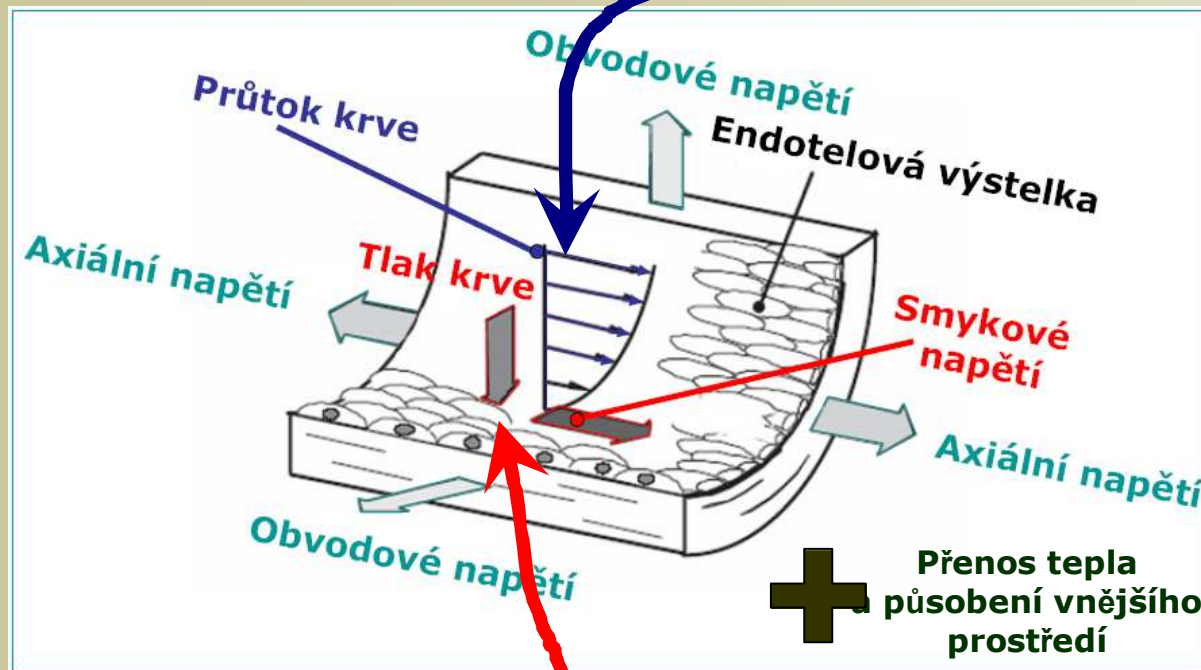


Repro: [http://php.med.unsw.edu.au/embryology/images/a/ae/Artery\\_histology\\_16.jpg](http://php.med.unsw.edu.au/embryology/images/a/ae/Artery_histology_16.jpg)



# MECHANICKÉ INTERAKCE

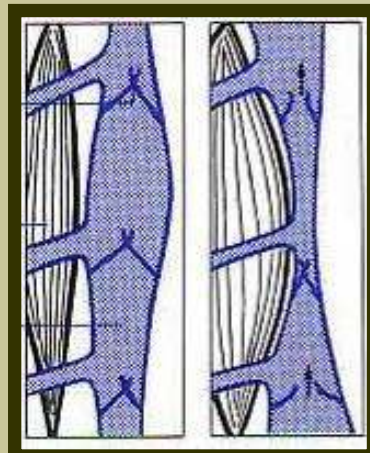
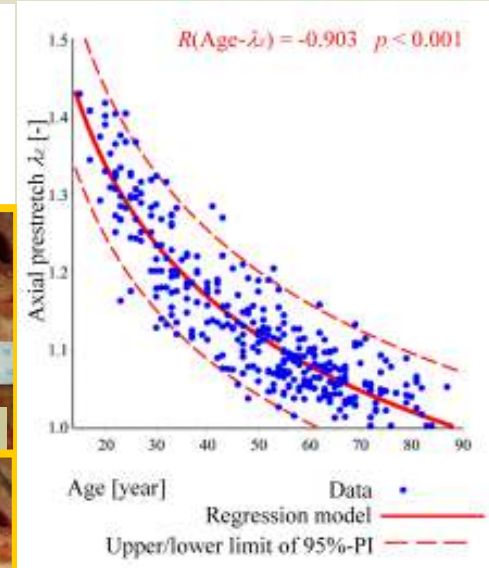
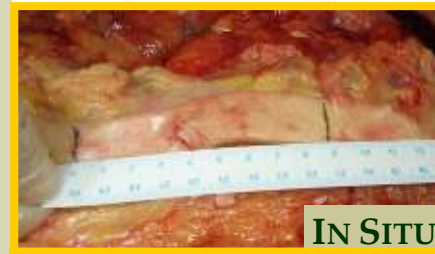
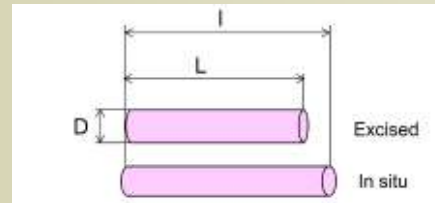
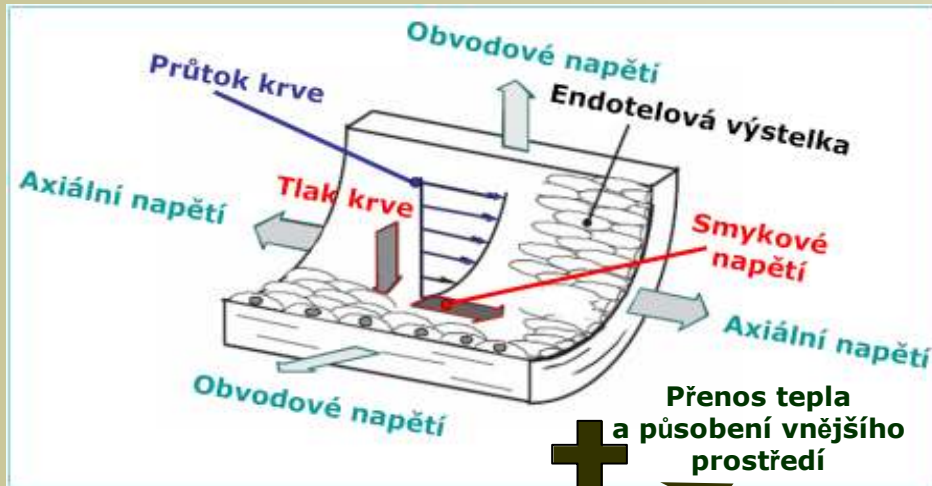
## Pasivní interakce





# MECHANICKÉ INTERAKCE

## Pasivní interakce - externí





# MECHANICKÉ INTERAKCE

## Pasivní interakce - interní

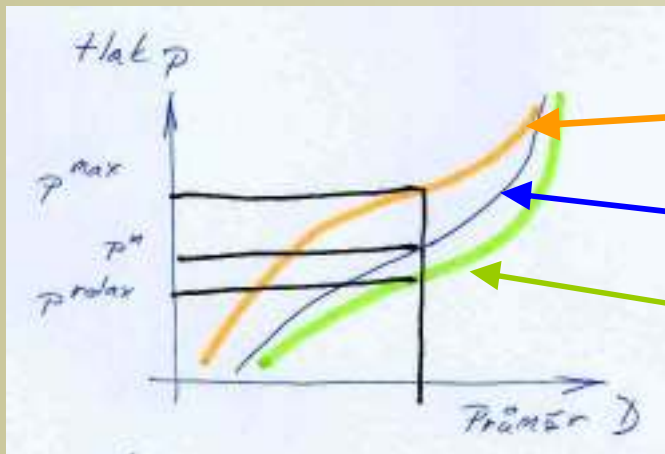


Po rozříznutí prstýnku se tepna díky uvolnění *zbytkových napětí* rozevře

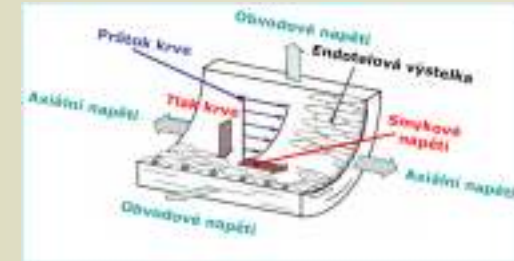
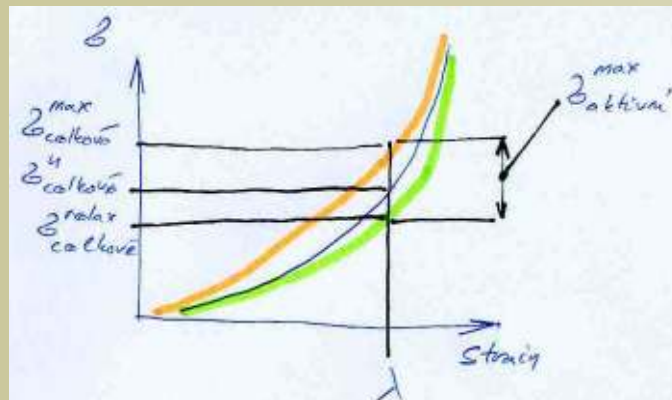
# MECHANICKÉ INTERAKCE

## Aktivní interakce

Inflační test  
(nafukování trubice)



Tahová zkouška



Maximální kontrakce  
po podání norepinefrinu céva ztuhne

Bazální tonus

Maximální dilatace  
po podání papaverinu

Repro: P. Fridez, A. Makino, D. Kakoi, H. Miyazaki, J.-J. Meister, K. Hayashi and N. Stergiopoulos 2002  
[Adaptation of Conduit Artery Vascular Smooth Muscle Tone to Induced Hypertension](http://www.springerlink.com/content/v257812562p17374/) Annals of Biomedical Engineering 30:7, 905 – 916.  
<http://www.springerlink.com/content/v257812562p17374/>

# VÝPOČTOVÝ MODEL

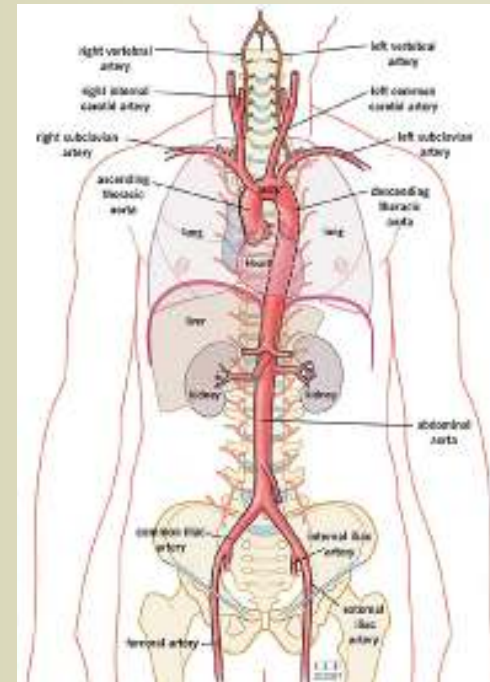
## Předpoklady pro formulaci úlohy

Konstitutivní rovnice

Předpoklady o geometrii

Předpoklady o zatížení a vazbách

Předpoklady o deformaci  
(konkrétní kinematika)



Repro: <http://my.clevelandclinic.org/heart/heart-blood-vessels/aorta.aspx>

# VÝPOČTOVÝ MODEL

## Konstitutivní rovnice

Použijeme model Guccione–McCulloch–Waldman, který popisuje cylindricky ortotropní hyperelastický materiál.

$$W = \frac{c_1}{2} \left( e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3 (E_{ZZ}^2 + E_{RR}^2)} - 1 \right)$$

J. Guccione, A. McCulloch, L. Waldman (1991) Passive material properties of intact ventricular myocardium determined from a cylindrical model. *J Biomech Eng* 113:42–55 <http://dx.doi.org/10.1115/1.2894084>

Konkrétní vyčíslení materiálových parametrů pro lidskou břišní aortu převezmeme od kolektivu M.R. Laborsseho, který publikoval výsledky 16 inflačně-extenzních testů...

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S175161611200210X?v=s5>



# VÝPOČTOVÝ MODEL

## Cylindrická ortotropie

...tři na sebe navzájem kolmé osy materiálové symetrie, které jsou totožné s osami válcového souřadnicového systému

## Pasivní odezva materiálu

bez aktivace hladkých svalových buněk

## Isochorický děj

(nestlačitelnost = během deformace materiál nemění objem)

# VÝPOČTOVÝ MODEL

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{I}$$

$$W = \frac{c_1}{2} \left( e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3 (E_{ZZ}^2 + E_{RR}^2)} - 1 \right)$$

Formální konstitutivní rovnice

$\mathbf{F}$  je deformační gradient

$W$  je hustota deformační energie

$\mathbf{I}$  je jednotkový tenzor 2. řádu

$p$  je hydrostatická složka napětí vzniklá reakcí na omezení stlačitelnosti

zde je použit tenzor  $\mathbf{E}$  (Green-Lagrangeův tenzor deformace), který převedeme na  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

# VÝPOČTOVÝ MODEL

## Geometrie

budeme předpokládat, že břišní aorta je válcová trubice konstantního poloměru  $R$  a tloušťky  $H$  (po vyjmutí z těla). Tyto údaje převezme opět z literatury:

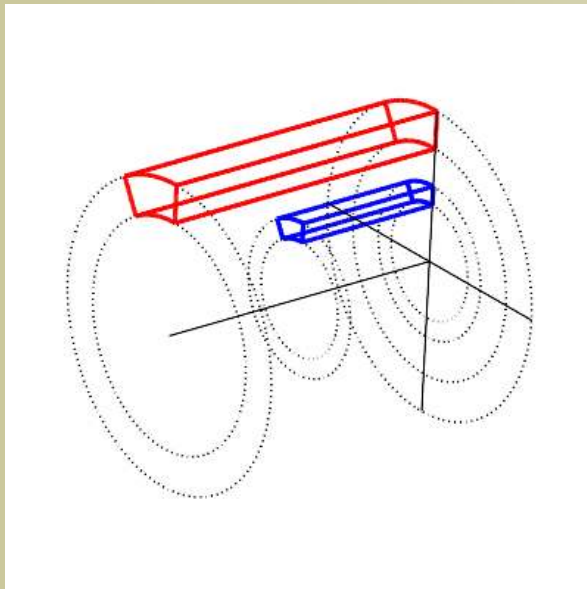
Michel R. Labrosse, Eleanor R. Gerson, John P. Veinot and Carsten J. Beller (2012) **Mechanical characterization of human aortas from pressurization testing and a paradigm shift for circumferential residual stress** by *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, in press. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmbbm.2012.08.004>

# VÝPOČTOVÝ MODEL

## Deformace

budeme předpokládat, že během tlakování trubice:

- zůstávají všechny řezy rovinné (resp. válcové)
- řezy se mohou vzdalovat/přibližovat
- řezy se vůči sobě nenatáčejí



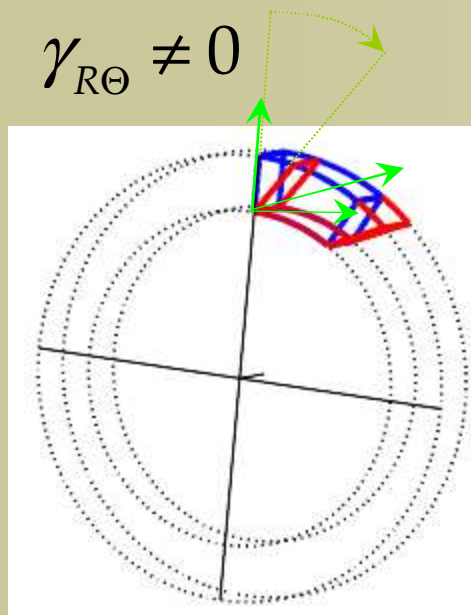
Pozor: Jde o pouhou skicu, obrázek nedodrží konstantní objem deformovaného elementu...



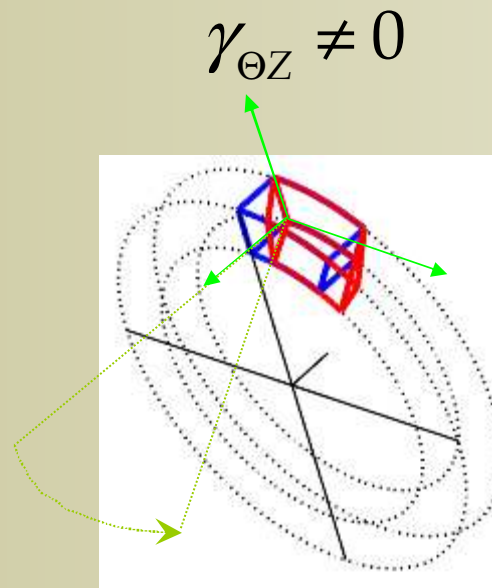
# VÝPOČTOVÝ MODEL

## Deformace

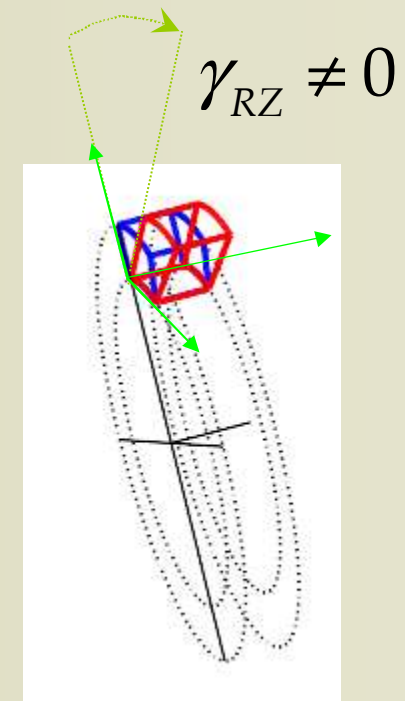
modelově vylučujeme existenci zkosů...



sklopení ve směru obvodu  
(přechází-li při nafukování válec  
ve válec, nemůže nastat)



krut, neboli odklopení od podélné osy  
(reálně může nastat když (1) je helikální  
proudění krve, (2) nesymetrie vazeb...)

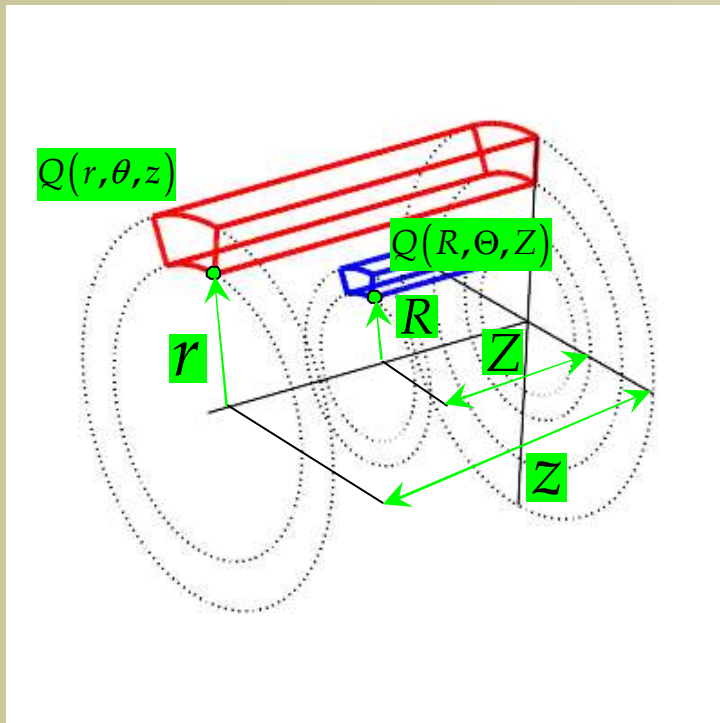


sklopení do směru podélné osy (reálně musí  
nastávat jako reakce na tření krve)

# VÝPOČTOVÝ MODEL

## Deformace

budeme si tedy představovat, že aorta (válcová trubice) se jen nafukuje a protahuje z tvaru válce do tvaru válce

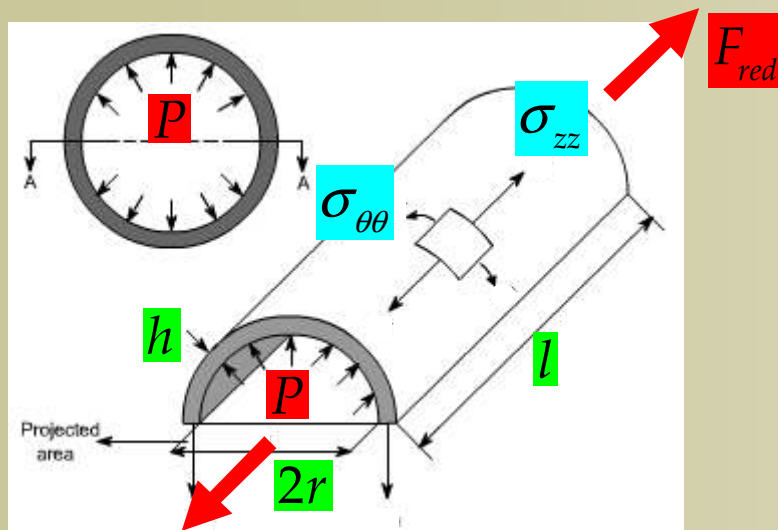


Materiálový bod  $Q$  v referenčních a průběžných válcových souřadnicích

$$Q \equiv Q \Rightarrow r = r(R) \quad \theta = \Theta \quad z = z(Z)$$

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

Vše (síly, deformace,...) se odehrává jen na úrovni střední plochy

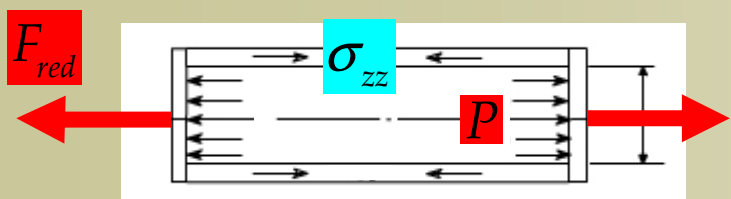


$$h = \lambda_{rR} H \quad r = \lambda_{\theta\theta} R \quad z = \lambda_{zZ} Z$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial X}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial r}{\partial R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{L} \end{pmatrix}$$



Repro: <http://nptel.iitm.ac.in/courses/Webcourse-contents/IIT-ROORKEE/strength%20of%20materials/lects%20&%20pics/image/lect15/lecture15.htm>

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

Nestlačitelnost (isochorický děj)

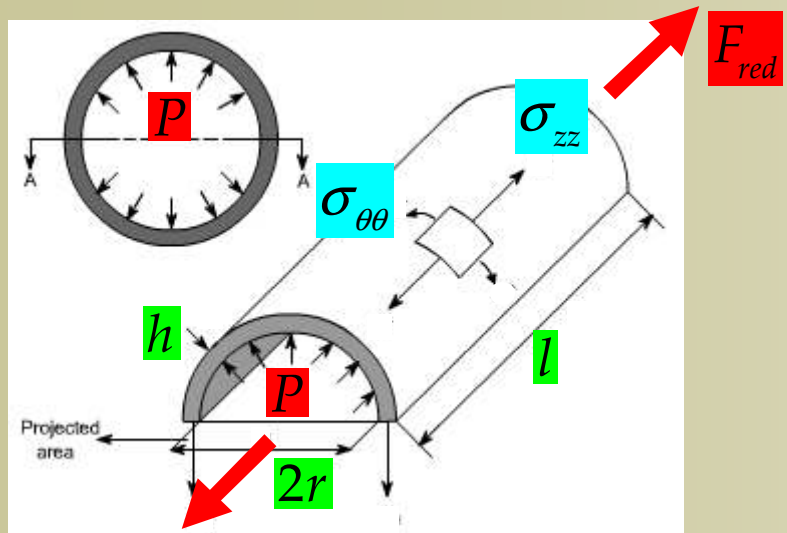
$$J = \frac{dv}{dV} = \mathbf{det} \mathbf{F} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{det} \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} = 1$$

$$\lambda_{rR} = \frac{1}{\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ}}$$



# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

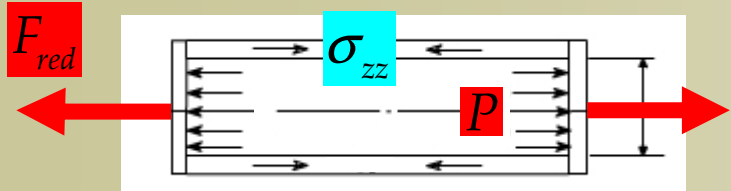
Intenzita vnitřních sil (napětí) odpovídá průměrné hodnotě po tloušťce objektu, která je rozprostřena uniformě (membrána)



$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{rP}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$



Repro: <http://nptel.iitm.ac.in/courses/Webcourse-contents/IIT-ROORKEE/strength%20of%20materials/lects%20&%20pics/image/lect15/lecture15.htm>

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

## Konstitutivní rovnice

$$W = \frac{c_1}{2} \left( e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3 (E_{ZZ}^2 + E_{RR}^2)} - 1 \right) \rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^2 - 1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}$$

$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - p$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p$$

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

## Finální soustava elastostatických rovnic

$$\sum F_r : \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = -\frac{P}{2}$$

$$\sum F_\theta : \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p = \frac{rP}{h}$$

$$\sum F_z : \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

Tuto soustavu vyřešíme ve třech krocích:

(1) Určíme „neurčitou“ reakci na nestlačitelnost  $p$

$$p = \frac{P}{2} - \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}}$$

...a potom ve všech rovnicích substituujeme  $\lambda_{rR} = 1/(\lambda_{\theta\theta} \cdot \lambda_{zz})$



# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

(2) Vypočteme sílu  $F_{red}$  nutnou k dosažení zvoleného počátečního předepnutí  $\lambda_{zZ}^{ini}$  (ta bude dále konstantní, což odpovídá experimentu, kdy nafukujeme svislou trubku s konstantním axiálním přivažkem)

(2a) Pro zvolené  $\lambda_{zZ}^{ini}$  určíme  $\lambda_{\theta\theta}^{ini}$  za podmínky  $P = 0$  z rovnice:

$$\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p = \frac{rP}{h}$$

(2b) Pro zvolené  $\lambda_{zZ}^{ini}$  a vypočtené  $\lambda_{\theta\theta}$  za podmínky  $P = 0$  určíme  $F_{red}$  z rovnice:

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

(3) Simulujeme odezvu materiálu na zvolený vnitřní tlak  $P$  a předepínací sílu  $F_{red}$ . Čili řešíme soustavu rovnic níže tak, že dosazujeme za  $P$  (např. od 0 do 16 kPa) a vypočítáváme  $\lambda_{\theta\theta}$  a  $\lambda_{zZ}$  (s tím, že na počátku pro  $P = 0$  se výsledky samozřejmě kryjí s předem vypočtenými  $\lambda_{\theta\theta}^{ini}$  a  $\lambda_{zZ}^{ini}$ ).

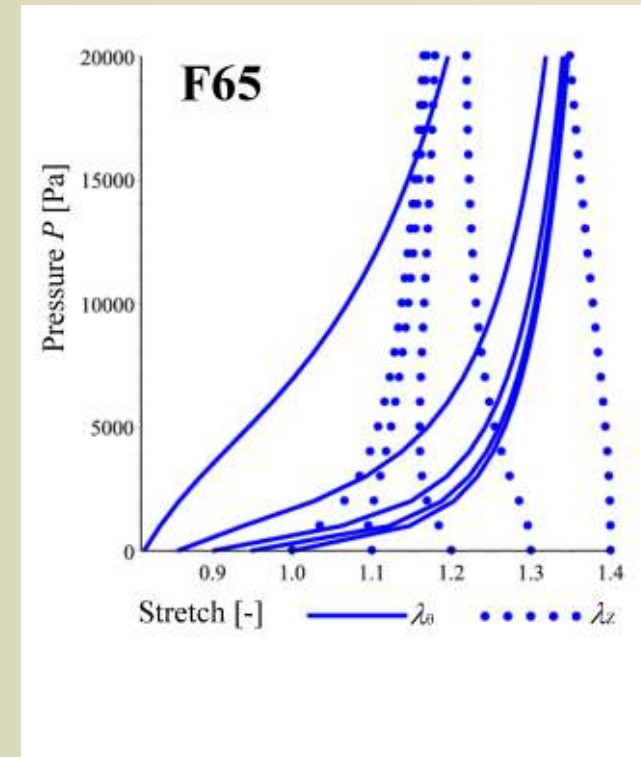
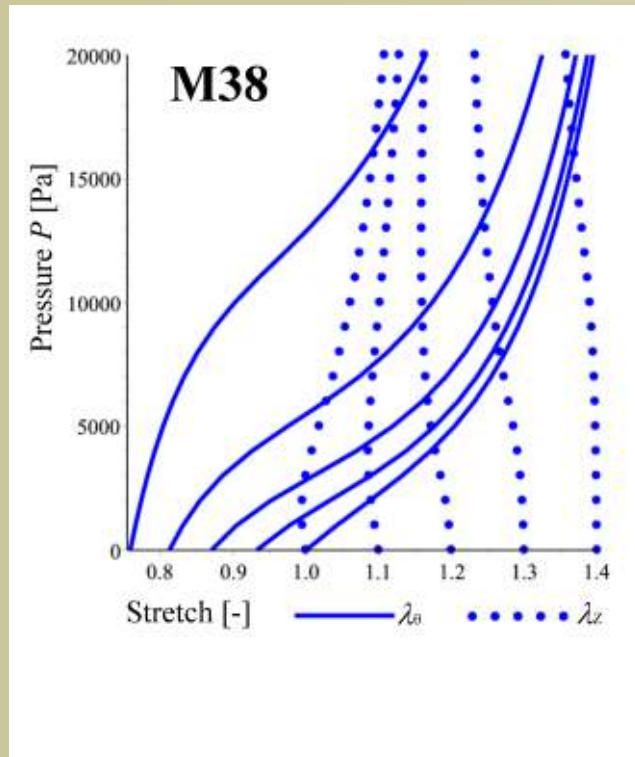
$$\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p = \frac{rP}{h}$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

Pro další výklad si stáhněte soubor **artery-thin-walled-tube.mw** z [www.biomechanika.cz](http://www.biomechanika.cz)

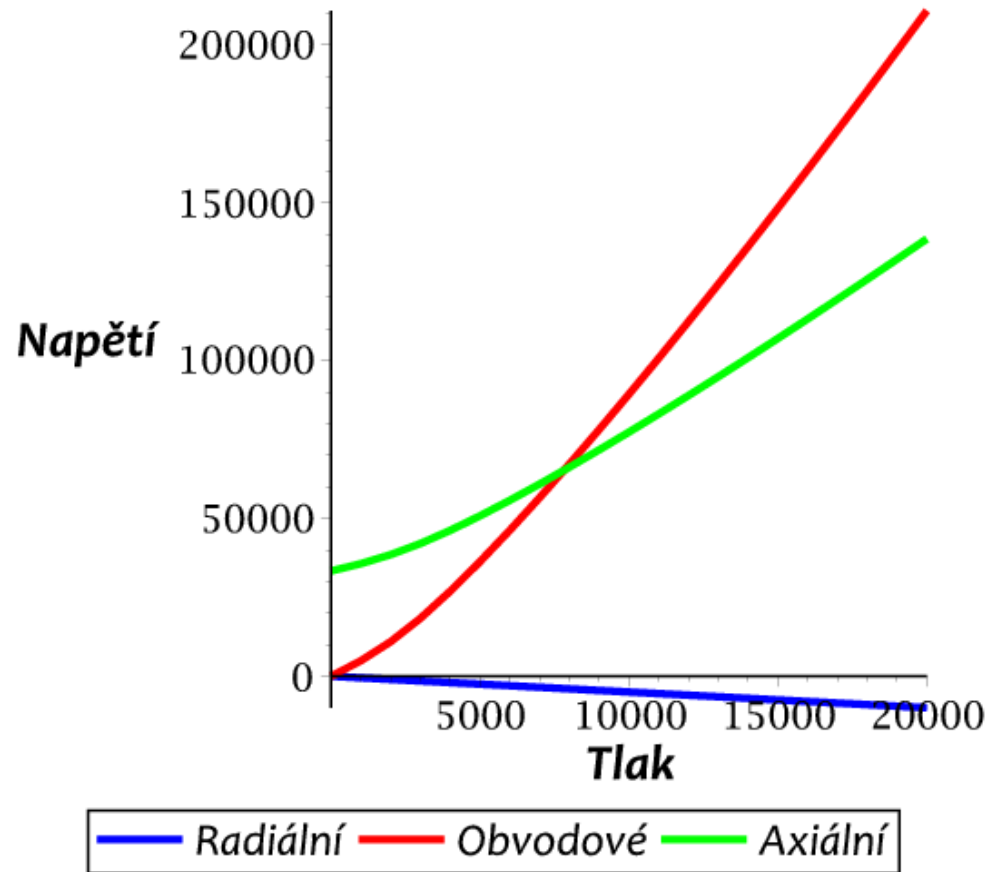
# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE



Ukázka výsledků simulace inflačně-extenzního testu lidských infrarenálních aort z Labrosse et al. (2012)

# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

## Inflace a extenze aorty M38





# TENKOSTĚNNÁ SIMULACE

## Nedostatky modelu

$$\sigma_{ij}(x) = ? \quad x \in (0, h)$$

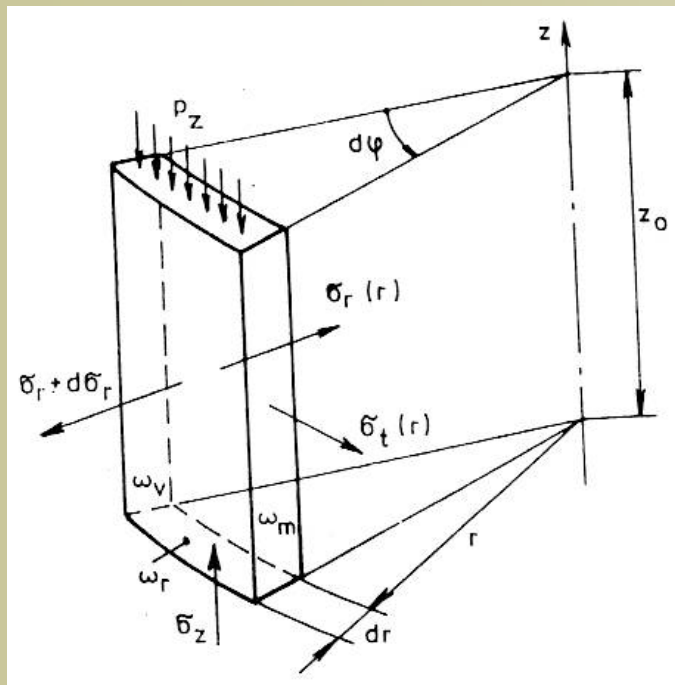
$$\sigma_{rr}(r) = -\frac{P}{2}$$



# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

## Silnostěnná nádoba

integrace po tloušťce stěny...



$$\frac{d\sigma_{rr}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rr}(r) - \sigma_{\theta\theta}(r)}{r} = 0$$

$$F_{red} + \pi r_i^2 P - 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{zz}(r) r dr = 0$$

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P$$

$$\sigma_{rr}(r_o) = 0$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

$$\sigma_{rr}(r_i) = -P$$

$$\sigma_{rr}(r_o) = 0$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r}$$

$$d\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

$$\int_{\sigma_{rr}(r)}^{\sigma_{rr}(r_o)} d\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r_o) - \sigma_{rr}(r) = 0 - \sigma_{rr}(r) = \int_r^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

Integrál jako funkce dolní meze

$$\sigma_{rr}(r) = -\int_r^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

Dále uvažme jednotkovou krychli, k níž přiložíme napětí  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  a  $\sigma_{zz}$ , která ji zdeformují na kvádr o hranách  $\lambda_{rR}$ ,  $\lambda_{\theta\theta}$  a  $\lambda_{zZ}$ . Přírůstek deformační energie  $dW$  při další diferenciální deformaci o  $d\lambda_{kK}$  (tj. např.  $\lambda_{rR}$  přejde na  $\lambda_{rR} + d\lambda_{rR}$ )

$$je: dW = \lambda_{zZ} \lambda_{rR} \sigma_{\theta\theta} d\lambda_{\theta\theta} + \lambda_{zZ} \lambda_{\theta\theta} \sigma_{rr} d\lambda_{rR} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} \sigma_{zz} d\lambda_{zZ}$$

Pro nestlačitelný materiál diferencováním:

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ} = 1 \Rightarrow d\lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ} + \lambda_{rR} d\lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} d\lambda_{zZ} = 0$$

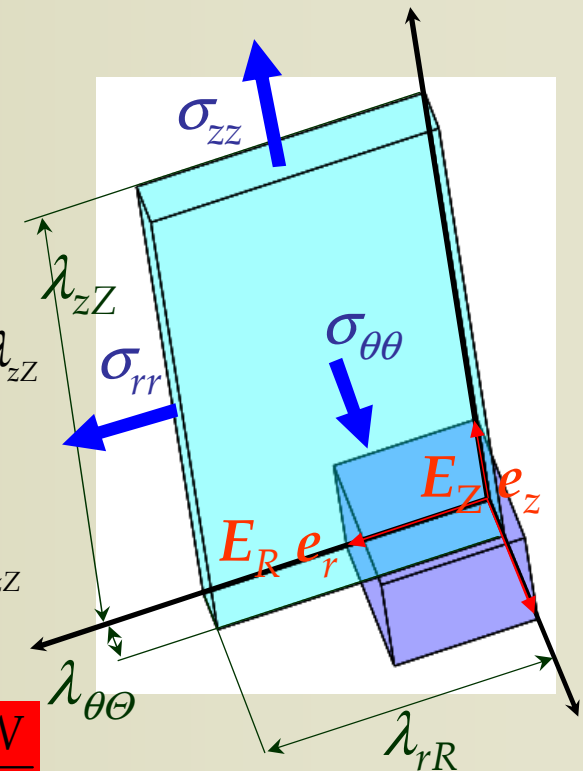
$$\dots \text{dosazením: } dW = \lambda_{rR} \lambda_{zZ} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) d\lambda_{\theta\theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) d\lambda_{zZ}$$

když předpokládáme, že nestlačitelnost

$$\text{eliminuje jednu proměnnou...: } dW = \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} d\lambda_{\theta\theta} + \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} d\lambda_{zZ}$$

Na závěr porovnáme výrazy pro  $dW$ :

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}}$$



# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

To, co jsme udělali, je eliminace parametru  $p$  z konstitutivních rovnic...

$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - p$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}}$$

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}}$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

Což dosadíme...

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{rr}(r) = - \int_r^{r_0} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

$$\sigma_{rr}(r) = - \int_r^{r_0} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{dr}{r}$$

Čili vyjádřili jsme radiální napětí na základě kinematiky a konstitutivní rovnice



# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{zz} r dr = -\pi r_i^2 P + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \left( \sigma_{rr} + \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \right) r dr$$

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \Rightarrow \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}}$$

$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} 2r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi r_i^2 P + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{d(r^2)}{dr} dr +$$

$$+ 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{d(r^2)}{dr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

$$-\pi r_i^2 P = \pi r_i^2 \sigma_{rr}(r_i) - \pi r_o^2 \sigma_{rr}(r_o) = -\pi \left[ r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o}$$

$$F_{red} = -\pi \left[ r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o} + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{d(r^2)}{dr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr =$$

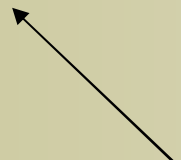
$$= -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

Integrace per partes

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

$$F_{red} = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}}$$


$$F_{red} = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

$$F_{red} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left( 2\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right) r dr$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

## Finální model

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_i) &= -P \\ \sigma_{rr}(r_o) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= -\int_r^{r_o} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{dr}{r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} + \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} &= \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} + \sigma_{rr}\end{aligned}$$

$$W = W(\lambda_{\theta\theta}, \lambda_{zZ})$$

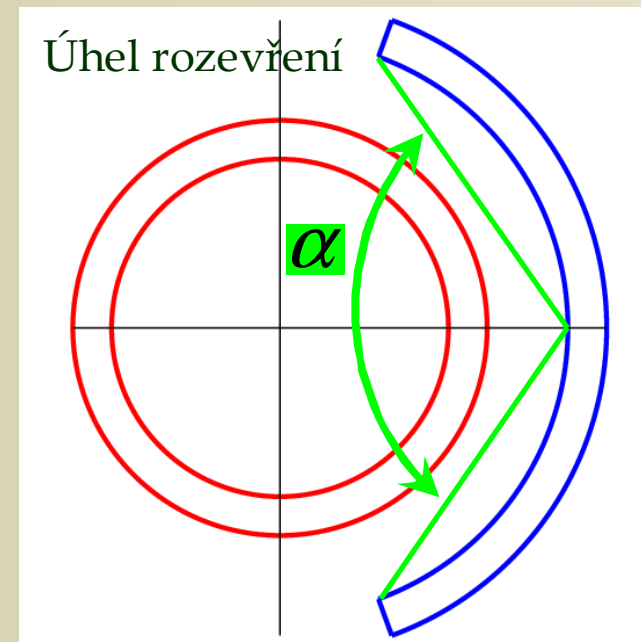
$$F_{red} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left( 2\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right) r dr \quad \lambda_{zZ} \neq \lambda_{zZ}(z)$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

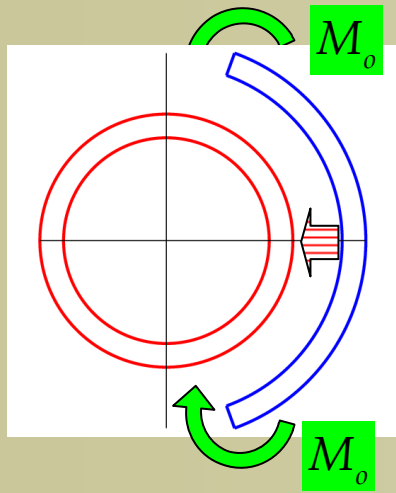
## Jak zahrnout zbytková napětí



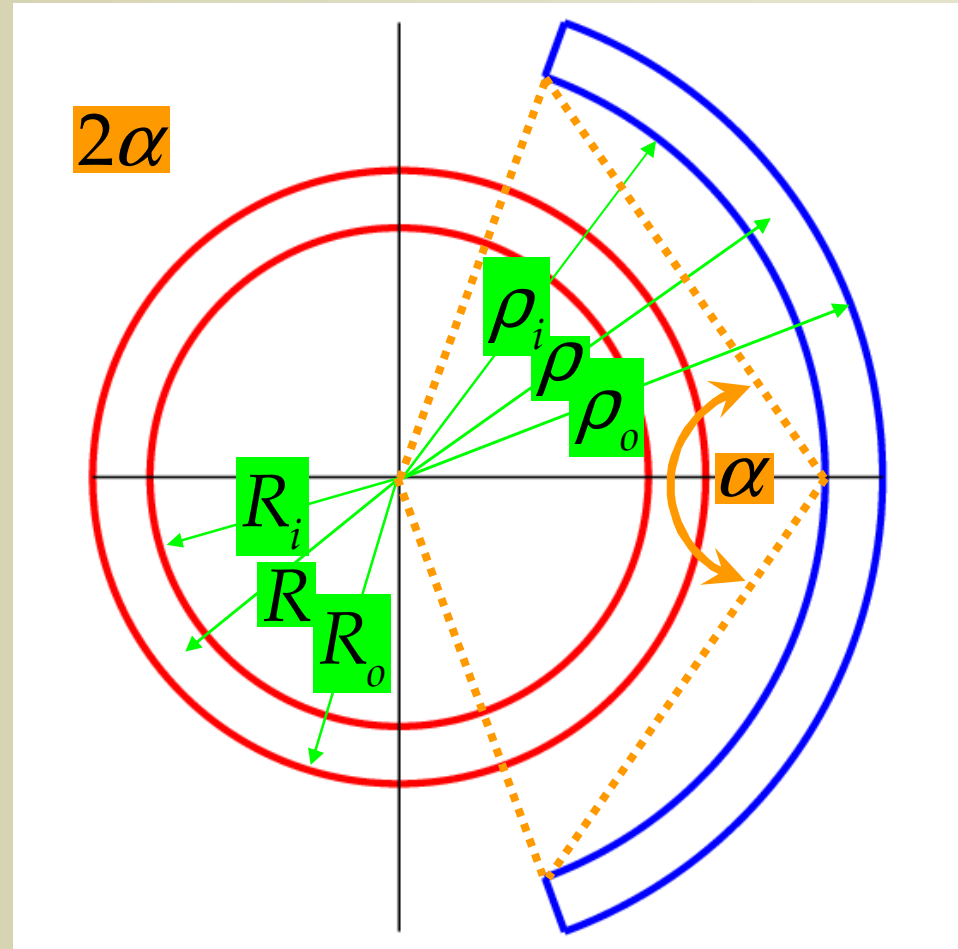
Rozevírání prstýnku můžeme modelovat jako otevírání uzavřeného kruhového prutu...



# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE



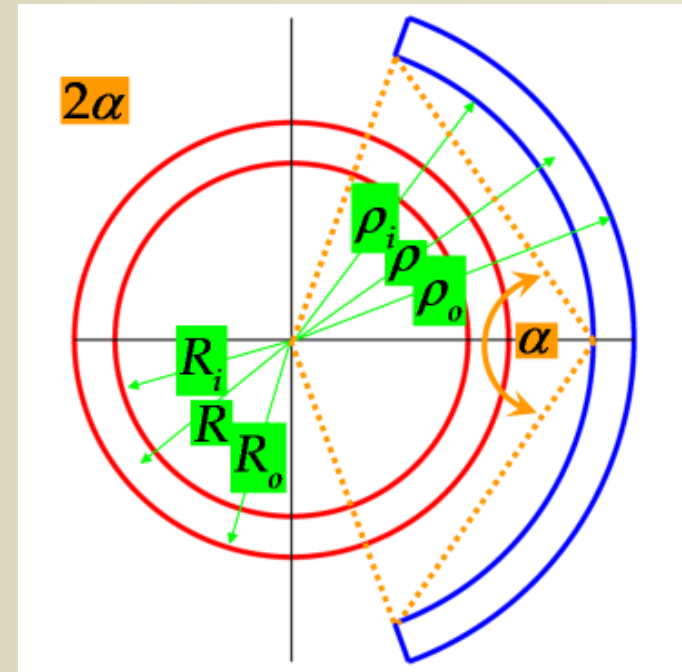
Rozstříženou konfiguraci  
budeme modelovat jako  
mezikruhovou výseč



# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

Rozstřiženou konfiguraci budeme považovat za beznapěťovou, a tak za referenční

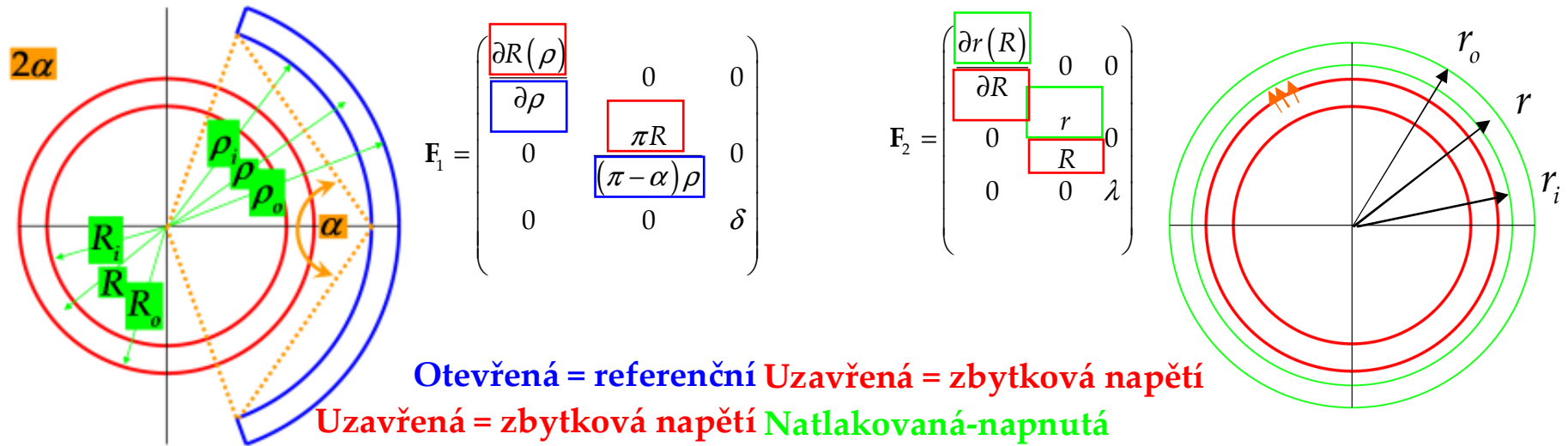
Uvažujeme-li tepnu, jako trubici, pak budeme zavírání modelovat jako přechod válcové výseče  $2\pi - 2\alpha$  do válce za podmínky zachování objemu





# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

## Kinematika – 3 konfigurace



$$(\rho \quad \psi \quad \xi) \rightarrow (R \quad \Theta \quad Z)$$

$$R = R(\rho)$$

$$\Theta = \frac{\pi\psi}{\pi - \alpha}$$

$$Z = \delta\xi$$

$$\delta = \frac{L}{\Xi}$$

$$\xi \in [0, \Xi]$$

$$Z \in [0, L]$$

$$z \in [0, l]$$

$$(R \quad \Theta \quad Z) \rightarrow (r \quad \theta \quad z)$$

$$r = r(R)$$

$$\theta = \Theta$$

$$z = \lambda Z$$

$$\lambda = \frac{l}{L}$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE


## Kinematika


$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(R)}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi R}{(\pi - \alpha)\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi r}{(\pi - \alpha)\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\psi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z\xi} \end{pmatrix}$$

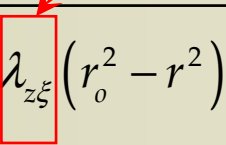
# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

## Kinematika

Pro integraci je třeba vyjádřit všechny funkce jakožto závislé na zdeformovaném (finálním) poloměru  $r$ , což provedeme z podmínky zachování objemu...

$$\pi l (r_o^2 - r^2) = \pi L (R_o^2 - R^2) \rightarrow R = \sqrt{R_o^2 - \frac{l}{L} (r_o^2 - r^2)}$$


$$\frac{2\pi - 2\alpha}{2} (\rho_o^2 - \rho^2) \Xi = \pi L (R_o^2 - R^2) \rightarrow \rho = \sqrt{\rho_o^2 - \frac{\pi}{\pi - \alpha} \frac{L}{\Xi} (R_o^2 - R^2)}$$


$$\frac{2\pi - 2\alpha}{2} (\rho_o^2 - \rho^2) \Xi = \pi l (r_o^2 - r^2) \rightarrow \rho = \sqrt{\rho_o^2 - \frac{\pi}{\pi - \alpha} \lambda_{z\xi} (r_o^2 - r^2)}$$


$$\lambda_{z\xi} = \frac{l}{\Xi} = \delta \lambda$$

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

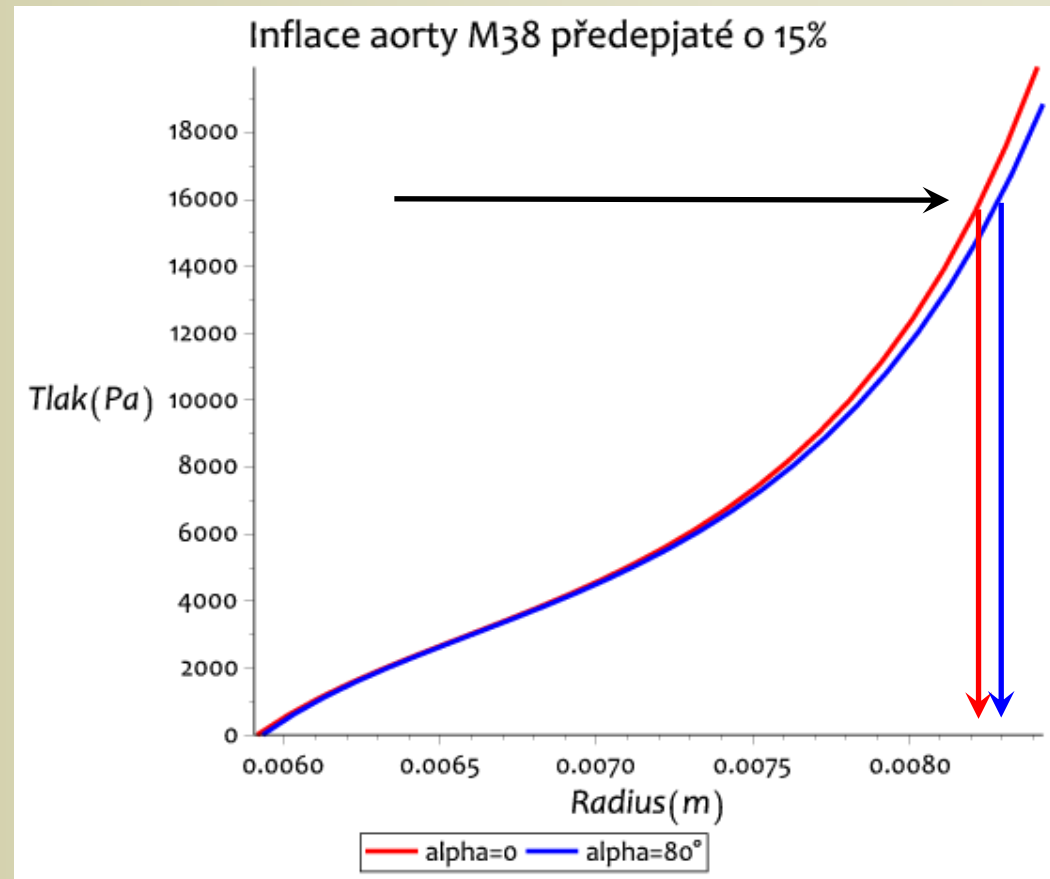
Pro další výklad si stáhněte soubor **artery-thick-walled-tube.mw** z [www.biomechanika.cz](http://www.biomechanika.cz)

# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

Zbytková deformace (parametrizovaná úhlem rozevření  $\alpha$ ) má jen malý vliv na tvar křivky  $P - r_0$  a  $F_{red}$ .

$$F_{red}(\alpha = 0^\circ, \lambda_z = 1.15, P = 16kPa) = 1.95N$$

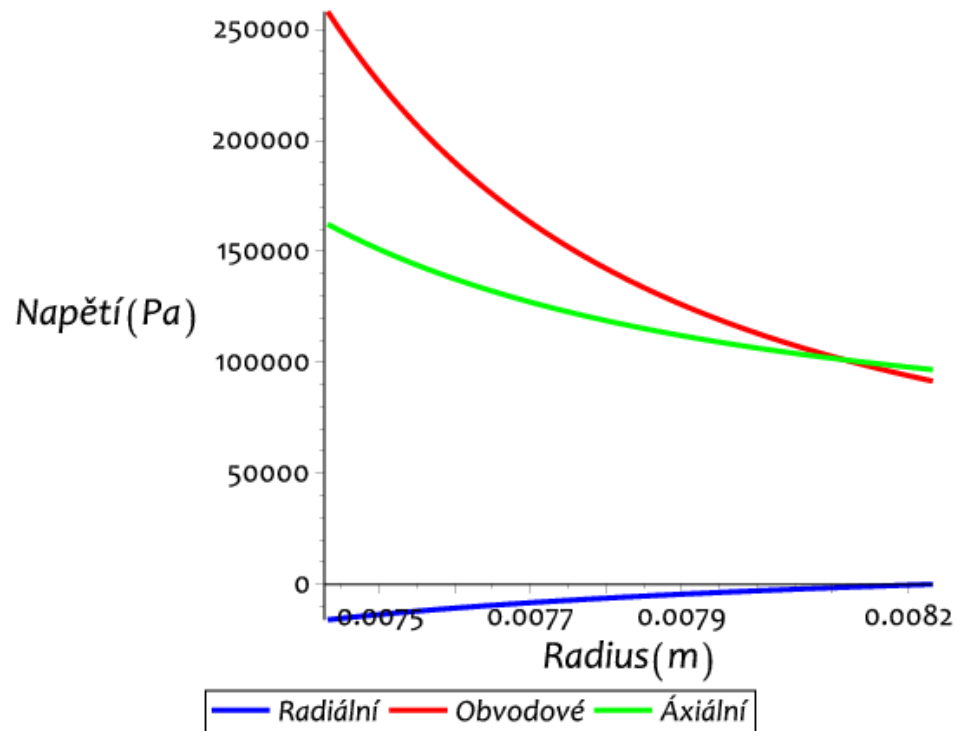
$$F_{red}(\alpha = 80^\circ, \lambda_z = 1.15, P = 16kPa) = 1.99N$$



# SILNOSTĚNNÁ SIMULACE

## Zbytková deformace homogenizuje průběh napětí

Inflace a extenze aorty M38 bez zbytkové deformace



Inflace a extenze aorty M38 se zbytkovou deformací

